UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009
16.07.2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

13. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie jeweils für die Funktion F und die Kurve γ das Kurvenintegral $\int_\gamma F(z)\,dz$.

a) $F(z) = \overline{z}z^2$, $\quad \gamma(t) = e^{i(\pi - t)}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$

b) $F(z) = |z|^2$, $\quad \gamma$ sei der positiv orientierte Rand von $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in (0,1)\}$

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Wert der folgenden Kurvenintegrale.

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\,dz$ **b)** $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz$

c) $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}\,dz$ **d)** $\displaystyle\int_{|z-2|=3} \frac{e^{i\cos z}\sin(z^4+1) - z}{(z-7)^{42}}\,dz$

Der Integrationsweg soll dabei jeweils die positiv orientierte Kreislinie sein.

Aufgabe 3

Entwickeln Sie $F(z) = \frac{1+i}{z^2 - z - iz + i}$ in eine Laurentreihe um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$, welche auf $G = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ konvergiert.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten von F sowie die Residuen in diesen Punkten.

a) $F(z) = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$ **b)** $F(z) = \dfrac{ze^{az}}{(z-1)^2}$ $\quad (a \in \mathbb{C}$ fest$)$

c) $F(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^4}$ **d)** $F(z) = ze^{\frac{1}{1-z}}$

Aufgabe 5

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes.

a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\,dz$ **b)** $\displaystyle\int_{|z|=9} \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}\,dz$ **c)** $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz}-1}\,dz$

d) $\displaystyle\int_{|z|=2} \exp\left(\frac{z}{1-z}\right)dz$ **e)** $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+i)}\,dz$

Der Integrationsweg soll dabei jeweils die positiv orientierte Kreislinie sein.

— bitte wenden —

Aufgabe 6

Es sei $R > 0$. Die Kurven γ_1, γ_2, $\gamma_3\colon [0,R] \to \mathbb{C}$ seien gegeben durch

$$\gamma_1(t) = t\,, \qquad \gamma_2(t) = R + it\,, \qquad \gamma_3(t) = t(1+i)\,.$$

a) Beweisen Sie die Gleichung

$$\int_{\gamma_3} e^{-z^2}\,dz = \int_{\gamma_1} e^{-z^2}\,dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,dz\,.$$

b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzungen

$$\int_{\gamma_2} e^{-z^2}\,dz \xrightarrow{R\to\infty} 0\,.$$

c) Berechnen Sie nun den Wert der so genannten *Fresnelschen Integrale*

$$\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx\,,$$

indem Sie den Grenzübergang $R \to \infty$ betrachten und $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ verwenden.

Aufgabe 7

Berechnen Sie mit Hilfe der komplexen Umkehrformel $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\right\}$.

Aufgabe 8

a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$(1+i)^i\,, \qquad i^{(i^i)}\,, \qquad (\operatorname{Log} i)^i\,.$$

Hierbei bezeichnet $\operatorname{Log} z$ den Hauptzweig des Logarithmus. Ausdrücke der Form z^α sind mit dem Hauptzweig des Logarithmus definiert.

b) Ermitteln Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $e^{1/z} = i$.

Aufgabe 9

a) Bestimmen Sie einen Zweig des Logarithmus, für den $\log(i) = \frac{5}{2}\pi i$ gilt, und geben Sie das Bild von $G = \{z \in \mathbb{C} :\ 1 < |z| < e,\ \frac{1}{4}\pi < \operatorname{Arg} z < \frac{3}{4}\pi\}$ unter dieser Abbildung an.

b) Es seien $a, b \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $ab, a^z \notin (-\infty, 0]$. Begründen oder widerlegen Sie folgende Identitäten.

i) $\operatorname{Log}(ab) = \operatorname{Log}(a) + \operatorname{Log}(b)$ **ii)** $a^{z_1} a^{z_2} = a^{z_1+z_2}$

iii) $a^z b^z = (ab)^z$ **iv)** $\operatorname{Log}(a^z) = z \operatorname{Log}(a)$

Sprechstunden der Tutoren zu HM II und KAI: Montag, 14.09.09, und Dienstag, 15.09.09, jeweils von 14:00 bis 15:30 Uhr im S 11 (Mathematikgebäude 20.30).

Die **Prüfungen** zu HM II und KAI finden am **Montag, den 21.09.2009,** statt.
Anmeldeschluss ist Freitag, der 24.07.2009 (Vorlesungsende SS 2009).

Hinweis In der großen Übung werden aller Voraussicht nach die folgenden Aufgaben besprochen: **6, 7, 8 und 9**. Die restlichen werden in den Tutorien behandelt.