UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl Sommersemester 2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für die gegebene Parametrisierung gilt $\gamma'(t) = -ie^{i(\pi-t)}$, und es ist

$$F(\gamma(t)) = \overline{e^{i(\pi-t)}}\big(e^{i(\pi-t)}\big)^2 = e^{-i(\pi-t)}e^{2i(\pi-t)} = e^{i(\pi-t)}\,.$$

Nach Definition des (komplexen) Kurvenintegrals ergibt sich damit

$$\begin{aligned}\int_\gamma F(z)\,dz &= \int_0^{\pi/2} F(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_0^{\pi/2} e^{i(\pi-t)}(-ie^{i(\pi-t)})\,dt \\ &= -ie^{2\pi i}\int_0^{\pi/2} e^{-2it}\,dt = -i\left[\frac{e^{-2it}}{-2i}\right]_{t=0}^{\pi/2} = \frac{e^{-i\pi}-e^0}{2} = \frac{-1-1}{2} = -1\,.\end{aligned}$$

b) Die Kurve γ durchläuft den Rand des Quadrates mit den Ecken 0, 1, $1+i$ und i, setzt sich also zusammen aus den vier Teilkurven

$$\gamma_1(t) = t\,, \qquad \gamma_2(t) = 1+it\,, \qquad \gamma_3(t) = 1-t+i\,, \qquad \gamma_4(t) = i(1-t)\,,$$

wobei jeweils $t \in [0,1]$ gilt. Somit folgt

$$\begin{aligned}\int_\gamma F(z)\,dz &= \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} F(z)\,dz = \sum_{k=1}^4 \int_0^1 F(\gamma_k(t))\gamma_k'(t)\,dt = \sum_{k=1}^4 \int_0^1 |\gamma_k(t)|^2\gamma_k'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 (1+t^2)i\,dt + \int_0^1 \big((1-t)^2+1\big)(-1)\,dt + \int_0^1 (1-t)^2(-i)\,dt \\ &= \int_0^1 \Big(t^2-(1-t)^2-1+i\big(1+t^2-(1-t)^2\big)\Big)\,dt = \int_0^1 (2t-2+2it)\,dt = -1+i\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Wir verwenden bei diesem Integranden die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{i/2}{z+i} - \frac{i/2}{z-i}\,.$$

Da die Punkte $-i$ und i im Inneren der Kreislinie $|z| = 2$ liegen und die Funktion $z \mapsto iz^3/2$ im konvexen Gebiet $G = \mathbb{C}$ holomorph ist, ergibt sich mit der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned}\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1}\,dz &= \int_{|z|=2} \frac{iz^3/2}{z-(-i)}\,dz - \int_{|z|=2} \frac{iz^3/2}{z-i}\,dz \\ &= 2\pi i\,\frac{iz^3}{2}\bigg|_{z=-i} - 2\pi i\,\frac{iz^3}{2}\bigg|_{z=i} = -\pi(-i)^3 + \pi i^3 = -2\pi i\,.\end{aligned}$$

b) Der Integrand lässt sich hier wie folgt umschreiben

$$\frac{e^z}{z^2+2z} = \frac{e^z}{z(z+2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{e^z}{z} - \frac{e^z}{z+2}\Big).$$

Der Punkt 0 liegt im Inneren des Integrationsweges, der Punkt -2 dagegen im Äußeren. Folglich liefern die Cauchysche Integralformel und der Cauchysche Integralsatz

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz = \frac{1}{2}\Big(\int_{|z|=1}\frac{e^z}{z}\,dz - \int_{|z|=1}\frac{e^z}{z+2}\,dz\Big) = \frac{1}{2}\Big(2\pi i\, e^z\big|_{z=0} - 0\Big) = \pi i\,.$$

c) Für die durch $F(z) := ze^{iz}$ definierte, in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion gilt

$$F'(z) = e^{iz} + z(ie^{iz}) = (1+iz)e^{iz}\,, \qquad F''(z) = ie^{iz} + (1+iz)(ie^{iz}) = (2i-z)e^{iz}\,,$$

und wegen $|\pi| < 4$ erhalten wir mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen 24.10 (a)

$$\int_{|z|=4} \frac{ze^{iz}}{(z-\pi)^3}\,dz = 2\pi i\,\frac{F''(\pi)}{2!} = \pi i\,(2i-z)e^{iz}\big|_{z=\pi} = \pi i\,(2i-\pi)(-1) = 2\pi + i\pi^2\,.$$

d) Die Nullstelle $z_0 = 7$ des Nenners des Integranden liegt außerhalb der Kreislinie $|z-2| = 3$, denn $|7-2| = 5 > 3$. Der Integrand ist also holomorph in dem konvexen Gebiet $G := \{\, z \in \mathbb{C} : |z-2| < 5 \,\}$, in welchem auch der geschlossene Integrationsweg verläuft. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt somit

$$\int_{|z-2|=3} \frac{e^{i\cos z}\sin(z^4+1) - z}{(z-7)^{42}}\,dz = 0\,.$$

Aufgabe 3

Anhand einer komplexen Partialbruchzerlegung erkennen wir

$$F(z) = \frac{1+i}{z^2 - z - iz + i} = \frac{i}{z-1} + \frac{-i}{z-i}\,, \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\{1, i\}\,.$$

Nun erweitern wir den zweiten Summanden mit i und verwenden für $|z| < 1$ zweimal die Formel der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{i}{z-1} + \frac{1}{iz+1} = -i\,\frac{1}{1-z} + \frac{1}{1-(-iz)} \\ &\overset{|-iz|=|z|<1}{=} -i\sum_{k=0}^{\infty} z^k + \sum_{k=0}^{\infty}(-iz)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\big(-i + (-i)^k\big)z^k\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Die Funktion

$$F(z) = \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2}$$

hat in $z_0 = 1$ eine Polstelle zweiter Ordnung. Gemäß 24.13 (a) lässt sich das Residuum von F in $z_0 = 1$ bestimmen durch

$$\operatorname{res}(F;1) = \Big(\frac{d}{dz}\Big((z-1)^2F(z)\Big)\Big)\Big|_{z=1} = \Big(\frac{d}{dz}\Big((z+1)^2\Big)\Big)\Big|_{z=1} = \Big(2(z+1)\Big)\Big|_{z=1} = 4\,.$$

Alternativ können wir auch die Laurententwicklung von F um $z_0 = 1$ berechnen

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{(z+1)^2}{(z-1)^2} = \frac{z^2+2z+1}{(z-1)^2} = \frac{z^2-2z+1}{(z-1)^2} + \frac{4z}{(z-1)^2} \\ &= 1 + \frac{4(z-1+1)}{(z-1)^2} = 1 + \frac{4}{z-1} + \frac{4}{(z-1)^2} \end{aligned}$$

und hieran $\operatorname{res}(F;1) = 4$ ablesen.

b) Die Funktion

$$F(z) = \frac{ze^{az}}{(z-1)^2} \quad (a \in \mathbb{C} \text{ fest})$$

besitzt in $z_0 = 1$ einen Pol zweiter Ordnung. Für das Residuum von F in 1 ergibt sich

$$\operatorname{res}(F;1) = \left(\frac{d}{dz}\Big((z-1)^2 F(z)\Big)\right)\bigg|_{z=1} = \left(\frac{d}{dz}\Big(ze^{az}\Big)\right)\bigg|_{z=1} = \Big(e^{az} + zae^{az}\Big)\bigg|_{z=1} = (1+a)e^a\,.$$

c) Die Funktion $F(z) = \frac{e^z}{(z-1)^4}$ hat in $z_0 = 1$ einen Pol der Ordnung 4. Mit Hilfe der Formel aus 24.13 (a) sieht man

$$\operatorname{res}(F;1) = \frac{1}{3!}\left(\frac{d^3}{dz^3}\Big((z-1)^4 F(z)\Big)\right)\bigg|_{z=1} = \frac{1}{6}\left(\frac{d^3}{dz^3}\, e^z\right)\bigg|_{z=1} = \frac{1}{6}\, e^z\bigg|_{z=1} = \frac{e}{6}\,.$$

d) Da F in $z_0 = 1$ eine wesentliche Singularität besitzt, können wir nicht wie zuvor vorgehen. Wir bestimmen stattdessen die zugehörige Laurentreihe um 1 und lesen das Residuum ab

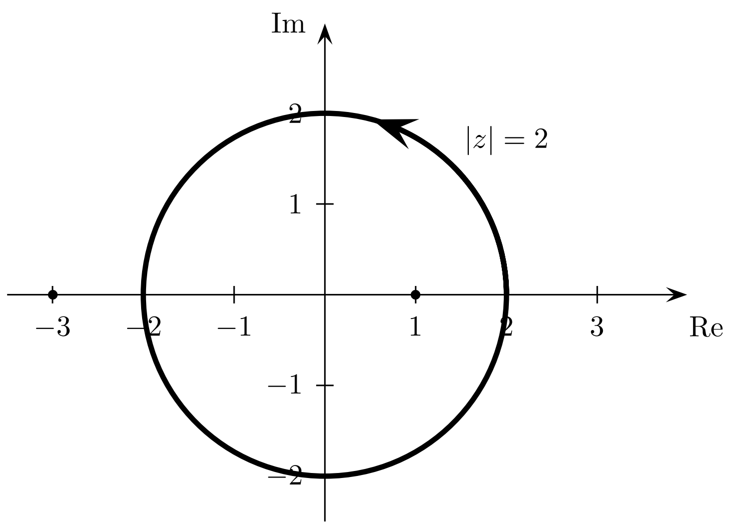
$$\begin{aligned}
F(z) = ze^{\frac{1}{1-z}} &= z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{1-z}\right)^n = \big((z-1)+1\big)\sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-k)!}\,(z-1)^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-k)!}\,(z-1)^{k+1} + \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-k)!}\,(z-1)^k \\
&= \sum_{l=-\infty}^{1} \frac{(-1)^{l-1}}{(-(l-1))!}\,(z-1)^l + \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-k)!}\,(z-1)^k \\
&= (z-1) + \sum_{k=-\infty}^{0}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{(-(k-1))!} + \frac{(-1)^k}{(-k)!}\right)(z-1)^k\,, \qquad z \neq 1\,.
\end{aligned}$$

Das Residuum von F in 1 ist der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$, also

$$\operatorname{res}(F;1) = \frac{(-1)^{-2}}{2!} + \frac{-1}{1!} = -\frac{1}{2}\,.$$

Aufgabe 5

a) Der Integrand $F(z) := \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$ besitzt in 1 eine einfache und in -3 eine doppelte Polstelle und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1, -3\}$.



Da innerhalb des Integrationsweges $|z| = 2$ nur die Polstelle 1 liegt, liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=2} F(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;1) = \frac{e\pi i}{8}\,,$$

denn für das Residuum von F in 1 gilt

$$\operatorname{res}(F;1) = (z-1)F(z)\Big|_{z=1} = \frac{e^z}{(z+3)^2}\Big|_{z=1} = \frac{e}{16}\,.$$

b) Nun liegen die beiden Polstellen -3 und 1 innerhalb des Integrationsweges $|z| = 9$. Deswegen gilt nach dem Residuensatz

$$\int_{|z|=9} F(z)\,dz = 2\pi i\Big(\operatorname{res}(F;1) + \operatorname{res}(F;-3)\Big) = 2\pi i\Big(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\Big) = \frac{(e-5e^{-3})\pi i}{8}\,,$$

da

$$\begin{aligned}\operatorname{res}(F;-3) &= \left(\frac{d}{dz}\,(z+3)^2F(z)\right)\Big|_{z=-3} = \left(\frac{d}{dz}\,\frac{e^z}{z-1}\right)\Big|_{z=-3} = \left(\frac{e^z(z-1)-e^z}{(z-1)^2}\right)\Big|_{z=-3} \\ &= \frac{-5e^{-3}}{16}\,.\end{aligned}$$

c) Schreibe $F(z) := \frac{z}{e^{iz}-1}$. Der Nenner von $F(z)$ wird genau dann 0, wenn $z = 2k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Von diesen Punkten liegt nur $z = 0$ im Inneren des Kreises $|z| = 1$. Daher ist

$$\int_{|z|=1} F(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;0)\,.$$

Nun sieht man anhand der Darstellung

$$F(z) = \frac{z}{e^{iz}-1} = \frac{z}{\big(1+iz+\frac12(iz)^2+\cdots\big)-1} = \frac{z}{iz-\frac12 z^2+\cdots} = \frac{1}{i-\frac12 z+\cdots}\,,$$

dass in $z = 0$ eine hebbare Singularität vorliegt. Deshalb gilt $\operatorname{res}(F;0) = 0$ und das Integral hat den Wert 0.

d) Sei $F(z) := e^{\frac{z}{1-z}}$. Hier liefert der Residuensatz

$$\int_{|z|=2} F(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{res}(F;1)\,.$$

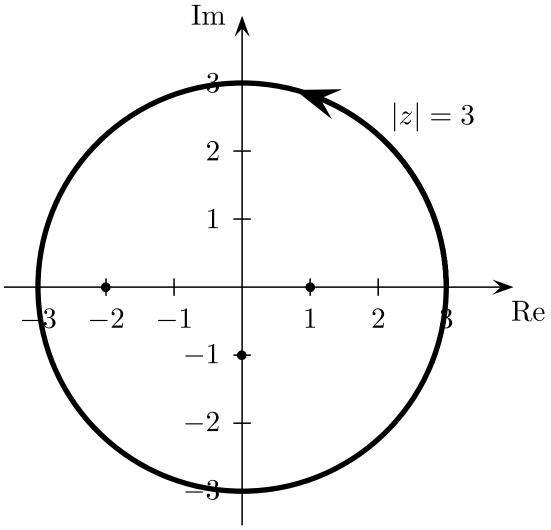
Um das Residuum $\operatorname{res}(F;1)$ zu berechnen, betrachten wir die Laurententwicklung von F um 1

$$F(z) = \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) = \exp\left(-1+\frac{1}{1-z}\right) = e^{-1}e^{-1/(z-1)} = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(z-1)^{-k}\,;$$

der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$ lautet $-e^{-1}$. Also ist $\operatorname{res}(F;1) = -e^{-1}$ und damit

$$\int_{|z|=2} \exp\left(\frac{z}{1-z}\right)dz = -\frac{2\pi i}{e}\,.$$

e) Der Integrand $F(z) := \frac{2z}{(z-1)(z+2)(z+i)}$ besitzt in 1, -2 und $-i$ jeweils einen Pol erster Ordnung und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1, -2, -i\}$.



Da sich alle Polstellen innerhalb des Integrationsweges $|z| = 3$ befinden, ergibt sich nach dem Residuensatz

$$\int_{|z|=3} F(z)\,dz = 2\pi i \Big(\operatorname{res}(F;1) + \operatorname{res}(F;-2) + \operatorname{res}(F;-i)\Big)\,.$$

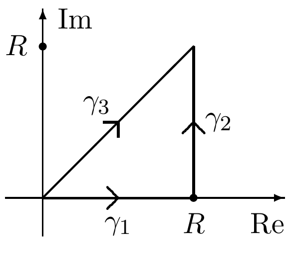
Wir berechnen nun die Residuen von F in den (einfachen) Polstellen

$$\begin{aligned}
\operatorname{res}(F;1) &= (z-1)F(z)\Big|_{z=1} = \frac{2z}{(z+2)(z+i)}\Big|_{z=1} = \frac{2}{3(1+i)} = \frac{1}{3}\,(1-i)\,,\\
\operatorname{res}(F;-2) &= (z+2)F(z)\Big|_{z=-2} = \frac{2z}{(z-1)(z+i)}\Big|_{z=-2} = \frac{4}{3(-2+i)} = -\frac{4}{15}\,(2+i)\,,\\
\operatorname{res}(F;-i) &= (z+i)F(z)\Big|_{z=-i} = \frac{2z}{(z-1)(z+2)}\Big|_{z=-i} = \frac{2i}{(i+1)(-i+2)} = \frac{1}{5}\,(1+3i)\,.
\end{aligned}$$

Hiermit ist

$$\int_{|z|=3} F(z)\,dz = 2\pi i \Big(\frac{1}{3}\,(1-i) - \frac{4}{15}\,(2+i) + \frac{1}{5}\,(1+3i)\Big) = 0\,.$$

Aufgabe 6



a) Im konvexen Gebiet $\mathbb{C}$ ist $F(z) := e^{-z^2}$ holomorph, und durch Aneinanderhängen von γ_1, γ_2 und $-\gamma_3$ erhält man eine geschlossene, positiv orientierte Kurve γ. Führen wir die Schreibweise $I(\Gamma) := \int_\Gamma F(z)\,dz$ ein, so liefert der Cauchysche Integralsatz

$$0 = I(\gamma) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2) + I(-\gamma_3) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2) - I(\gamma_3)\,.$$

Damit ergibt sich $I(\gamma_3) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2)$, also die behauptete Gleichung.

b) Es gilt $\gamma_2^2(t) = (R+it)^2 = R^2 + 2iRt - t^2$ und $\gamma_2'(t) = i$. Damit erhalten wir

$$|I(\gamma_2)| = \left|\int_0^R e^{-\gamma_2^2(t)}\gamma_2'(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^R \left|e^{-R^2-2iRt+t^2}i\right|dt = \int_0^R e^{t^2-R^2}\,dt\,.$$

Wegen der für alle $t \in [0,R]$ gültigen Abschätzung $t^2 \leqslant Rt$ bekommen wir folglich

$$|I(\gamma_2)| \leqslant \int_0^R e^{Rt-R^2}\,dt = \left[\frac{e^{Rt-R^2}}{R}\right]_{t=0}^R = \frac{1-e^{-R^2}}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0\,,$$

und damit ist $I(\gamma_2) \to 0$ für $R \to \infty$ bewiesen.

Man beachte: Die Standardabschätzung für Kurvenintegrale hätte hier nicht ausgereicht, denn es gilt $L(\gamma_2) = R$ und $\max\{|F(z)| : z \in \gamma_2([0,R])\} = 1$.

c) Wir betrachten nun noch $I(\gamma_1)$ und $I(\gamma_3)$. Für das erste Kurvenintegral erhalten wir

$$I(\gamma_1) = \int_0^R e^{-\gamma_1^2(t)}\gamma_1'(t)\,dt = \int_0^R e^{-t^2}\,dt \xrightarrow{R\to\infty} \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

und wegen $\gamma_3^2(t) = t^2(1+i)^2 = 2it^2$ und $\gamma_3'(t) = 1+i$ gilt

$$I(\gamma_3) = \int_0^R e^{-\gamma_3^2(t)}\gamma_3'(t)\,dt = \int_0^R e^{-2it^2}(1+i)\,dt \xrightarrow{R\to\infty} (1+i)\int_0^\infty e^{-2it^2}\,dt\,.$$

(Dieses uneigentliche Integral muss wegen der Konvergenz von $I(\gamma_1)$ und $I(\gamma_2)$ sowie der in **a)** bewiesenen Gleichung existieren.) Mit der Substitution $x = \sqrt{2}\,t$ ergibt sich

$$I(\gamma_3) \xrightarrow{R\to\infty} (1+i)\int_0^\infty e^{-ix^2}\,\frac{dx}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \big[\cos(x^2) - i\sin(x^2)\big]\,dx\,.$$

Beim Grenzübergang $R \to \infty$ folgt also mit **b)** aus der in **a)** bewiesenen Gleichung

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \big[\cos(x^2) - i\sin(x^2)\big]\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0\,.$$

Für die beiden Integrale $C := \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ und $S := \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ hat man somit

$$(1+i)(C - iS) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,, \qquad \text{d.h.} \qquad (C+S) + i(C-S) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,.$$

Hieraus folgen die Gleichungen $C + S = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$ und $C - S = 0$, also ist $C = S = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$.

Aufgabe 7

Es sei

$$F(s) := \frac{1}{(s+1)(s-2)^2}$$

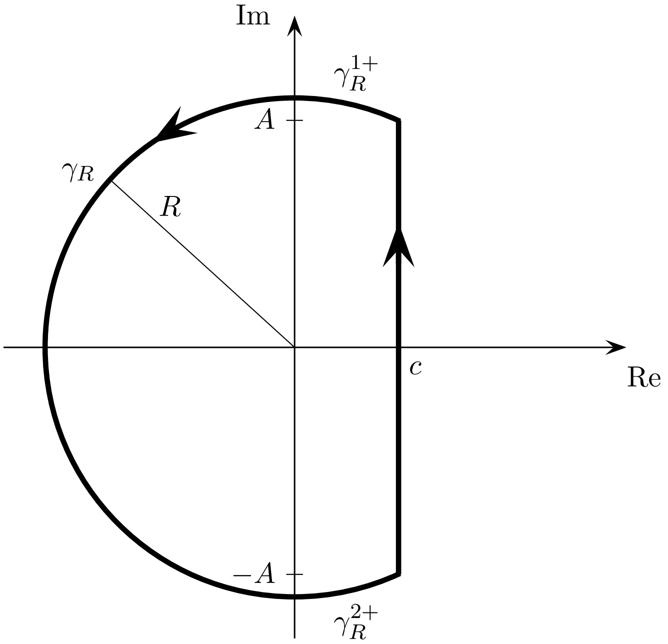
für $\mathrm{Re}(s) > 2$. Die Funktion $\widetilde{F}\colon \mathbb{C}\setminus\{-1,2\} \to \mathbb{C}$, $\widetilde{F}(s) := \frac{1}{(s+1)(s-2)^2}$, ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{-1,2\}$ und besitzt in $a_1 := -1$ eine einfache und in $a_2 := 2$ eine doppelte Polstelle. Außerdem stimmen $F(s)$ und $\widetilde{F}(s)$ für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 2$ überein.
Sei $c > 2$. Wir wollen den Wert von

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iA}^{c+iA} e^{st}F(s)\,ds = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iA}^{c+iA} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds$$

bestimmen. Um das Integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iA}^{c+iA} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds$$

zu berechnen, betrachten wir den folgenden einfach geschlossenen, positiv orientierten Integrationsweg



(hierbei ist nach Pythagoras $R^2 = c^2 + A^2$; γ_R bezeichnet den (gesamten) Kreisbogen, während γ_R^{1+} bzw. γ_R^{2+} nur diejenigen Teile des Kreisbogens γ_R sind, die sich 1. bzw. 4. Quadranten befinden) und wenden den Residuensatz an

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iA}^{c+iA} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds = \sum_{j=1}^{2}\operatorname{res}(e^{st}\widetilde{F}(s);a_j)\,.$$

Wir zeigen jetzt

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\gamma_R} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds = 0\,.$$

Dazu weisen wir die Voraussetzungen des Jordanschen Lemmas 24.16 nach. Zum einen ist $\widetilde{F}$ auf $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 2\}$ holomorph, zum anderen gilt für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = R > 2$ nach der umgekehrten Dreiecksungleichung (diese lautet: $|a+b| \geqslant ||a|-|b||$ für alle $a, b \in \mathbb{C}$)

$$|\widetilde{F}(z)| = \frac{1}{|z+1|\,|z-2|^2} \leqslant \frac{1}{(|z|-1)\,(|z|-2)^2} = \frac{1}{(R-1)\,(R-2)^2} =: C(R) \longrightarrow 0 \quad (R\to\infty)\,.$$

Das Jordansche Lemma liefert

$$\int_{\gamma_R^-} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds \longrightarrow 0 \quad (R\to\infty)\,,$$

wobei $\gamma_R^-(\varphi) := Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ (γ_R^- ist also der Teil des Kreisbogens γ_R mit Realteil $\leqslant 0$). Es verbleibt zu begründen, dass die Kurvenintegrale

$$\int_{\gamma_R^{1+}} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds \qquad \text{bzw.} \qquad \int_{\gamma_R^{2+}} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds$$

für $R \to \infty$ ebenfalls gegen 0 konvergieren. Da $|\widetilde{F}(z)| \leqslant C(R)$ für $|z| = R$ und $C(R) \longrightarrow 0$ für $R \to \infty$ gilt sowie die Längen der Kurven γ_R^{1+} bzw. γ_R^{2+} beschränkt sind (mit einer Schranke, die allein von c abhängt), verschwinden die entsprechenden Kurvenintegrale im Limes $R \to \infty$.
Für $A \to \infty$ (und damit auch $R \to \infty$) haben wir also (vgl. auch Folgerung nach 24.16)

$$\lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iA}^{c+iA} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds = \sum_{j=1}^{2}\operatorname{res}(e^{st}\widetilde{F}(s);a_j)\,.$$

Mit

$$\operatorname{res}(e^{st}\widetilde{F}(s);-1) = (s+1)e^{st}\widetilde{F}(s)\Big|_{s=-1} = \frac{e^{st}}{(s-2)^2}\Big|_{s=-1} = \frac{1}{9}\,e^{-t}$$

und
$$\operatorname{res}(e^{st}\widetilde{F}(s);2) = \frac{d}{ds}\,\frac{e^{st}}{s+1}\Big|_{s=2} = \frac{te^{st}(s+1)-e^{st}}{(s+1)^2}\Big|_{s=2} = \frac{1}{9}\big(3te^{2t}-e^{2t}\big)$$
erhalten wir schließlich
$$\mathscr{L}^{-1}\Big\{\frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\Big\}(t) = \lim_{A\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{c-iA}^{c+iA} e^{st}\widetilde{F}(s)\,ds = \frac{1}{9}\big(e^{-t}+3te^{2t}-e^{2t}\big)\,,$$
d.h. für $f(t)=\frac{1}{9}\big(e^{-t}+3te^{2t}-e^{2t}\big)$, $t\geqslant 0$, gilt
$$\mathscr{L}\{f\}(s) = \frac{1}{(s+1)(s-2)^2}\,, \qquad \operatorname{Re}(s)>2\,.$$

Aufgabe 8

a) • Mit $\operatorname{Log}(1+i)=\ln|1+i|+i\operatorname{Arg}(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\pi/4$ ergibt sich
$$(1+i)^i = e^{i\operatorname{Log}(1+i)} = e^{i(\ln\sqrt{2}+i\pi/4)} = e^{i\ln\sqrt{2}-\pi/4} = e^{-\pi/4}\big(\cos(\ln\sqrt{2}\,)+i\sin(\ln\sqrt{2}\,)\big)\,.$$
Man liest ab: $\operatorname{Re}((1+i)^i)=e^{-\pi/4}\cos(\frac{1}{2}\ln 2)$ und $\operatorname{Im}((1+i)^i)=e^{-\pi/4}\sin(\frac{1}{2}\ln 2)$.

• Wegen $\operatorname{Log} i=\ln|i|+i\operatorname{Arg} i=i\pi/2$ gilt $i^i=e^{i(i\pi/2)}=e^{-\pi/2}$, also
$$i^{(i^i)} = i^{(e^{-\pi/2})} = \exp(e^{-\pi/2}\operatorname{Log} i) = \exp(\tfrac{1}{2}\pi e^{-\pi/2} i) = \cos(\tfrac{1}{2}\pi e^{-\pi/2}) + i\sin(\tfrac{1}{2}\pi e^{-\pi/2})\,.$$
Man sieht: $\operatorname{Re}(i^{(i^i)})=\cos(\frac{1}{2}\pi e^{-\pi/2})$ und $\operatorname{Im}(i^{(i^i)})=\sin(\frac{1}{2}\pi e^{-\pi/2})$.

• Wegen $\operatorname{Log} i = i\pi/2$ ergibt sich
$$\operatorname{Log}(\operatorname{Log} i) = \operatorname{Log}(i\pi/2) = \ln|i\pi/2| + i\operatorname{Arg}(i\pi/2) = \ln(\pi/2)+i\pi/2\,.$$
Damit erhalten wir
$$(\operatorname{Log} i)^i = e^{i\operatorname{Log}(\operatorname{Log} i)} = e^{i\ln(\pi/2)-\pi/2} = e^{-\pi/2}\cos\big(\ln(\pi/2)\big) + ie^{-\pi/2}\sin\big(\ln(\pi/2)\big)\,,$$
und Real- und Imaginärteil können unmittelbar abgelesen werden.

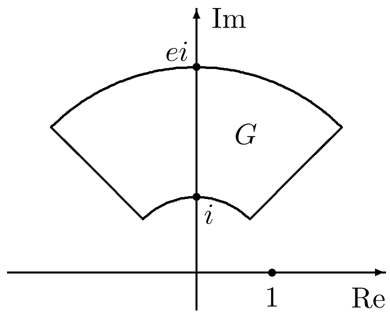
b) Die Gleichung $e^{1/z}=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$ ist genau dann erfüllt, wenn
$$\frac{1}{z} = i\,\frac{\pi}{2}+2k\pi i = i\,\frac{(1+4k)\pi}{2} \qquad\Longleftrightarrow\qquad z=-i\,\frac{2}{(1+4k)\pi}$$
mit einem gewissen $k\in\mathbb{Z}$ gilt, d.h. $\{z\in\mathbb{C}:\, e^{1/z}=i\}=\{\frac{-2i}{(1+4k)\pi}\,:\, k\in\mathbb{Z}\}$.

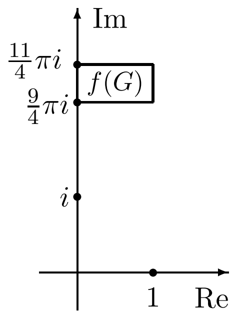
Aufgabe 9

a) Auf $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ sind die verschiedenen Zweige des Logarithmus gegeben durch
$$\log_k(z) := \ln|z| + i\big(\operatorname{Arg}(z)+2k\pi\big)\,, \qquad \text{wobei } \operatorname{Arg}(z)\in(-\pi,\pi) \text{ und } k\in\mathbb{Z}.$$
Hierbei ist $\log_k\colon \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\to\mathbb{C}$ holomorph und injektiv. (Für $k=0$ ergibt sich der Hauptzweig des Logarithmus. Nach der Bemerkung in 24.17 ist dieser holomorph und injektiv. Addiert man für $k\neq 0$ die Konstante $2k\pi i$, so bleiben diese Eigenschaften erhalten.) Es gilt
$$\log_k(i) = \ln|i| + i\operatorname{Arg}(i) + 2k\pi i = 0 + i\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi i = (2k+\tfrac{1}{2})\pi i\,.$$
Somit ist die Forderung $\log_k(i)=\frac{5}{2}\pi i$ genau für $k=1$ erfüllt; also ist $\log_1\colon\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]\to\mathbb{C}$ der gesuchte Zweig des Logarithmus.

Für $z \in G$ durchläuft $|z|$ das Intervall $(1, e)$, also $\operatorname{Re}\log_1(z) = \ln|z|$ das Intervall $(0,1)$. Da $\operatorname{Arg}(z)$ das Intervall $(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$ überstreicht, muss $\operatorname{Im}\log_1(z) = \operatorname{Arg}(z) + 2\pi$ das Intervall $(\frac{9}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi)$ durchlaufen. Insgesamt bedeutet dies

$$\log_1(G) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \in (0,1),\ \operatorname{Im}(z) \in (\tfrac{9}{4}\pi, \tfrac{11}{4}\pi) \right\}.$$





b) **i)** I.a. ist die Aussage falsch! Wähle beispielsweise $a = i$ und $b = -1 + i$. Dann gilt

$$\operatorname{Log}(ab) = \operatorname{Log}(-1 - i) = \ln\sqrt{2} - i\,\tfrac{3}{4}\pi\,,$$
$$\operatorname{Log}(a) + \operatorname{Log}(b) = i\,\tfrac{\pi}{2} + \ln\sqrt{2} + i\,\tfrac{3}{4}\pi = \ln\sqrt{2} + i\,\tfrac{5}{4}\pi\,.$$

Offenbar ist hier $\operatorname{Log}(ab) = \operatorname{Log}(a) + \operatorname{Log}(b)$ nicht erfüllt.

ii) Die Aussage ist richtig, denn mit der Funktionalgleichung der (komplexen) Exponentialfunktion ergibt sich für jedes $a \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ und $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$a^{z_1} a^{z_2} = e^{z_1 \operatorname{Log} a} e^{z_2 \operatorname{Log} a} = e^{z_1 \operatorname{Log} a + z_2 \operatorname{Log} a} = e^{(z_1+z_2)\operatorname{Log} a} = a^{z_1+z_2}\,.$$

iii) I.a. ist die Aussage falsch! Wir betrachten das Gegenbeispiel aus **i)**, also $a = i$ und $b = -1 + i$. Außerdem sei $z = i$. Dann ist

$$a^z b^z = e^{z \operatorname{Log} a} e^{z \operatorname{Log} b} = e^{z(\operatorname{Log} a + \operatorname{Log} b)} \overset{\textbf{i)}}{=} e^{i(\ln\sqrt{2} + i\,\frac{5}{4}\pi)} = e^{-\frac{5}{4}\pi + i\ln\sqrt{2}}\,,$$
$$(ab)^z = e^{z \operatorname{Log}(ab)} \overset{\textbf{i)}}{=} e^{i(\ln\sqrt{2} - i\,\frac{3}{4}\pi)} = e^{\frac{3}{4}\pi + i\ln\sqrt{2}}\,.$$

Offenbar stimmen diese komplexen Zahlen nicht überein.

iv) I.a. ist die Aussage falsch! Wähle beispielsweise $a = e$ und $b = 2\pi i$. Dann gilt

$$\operatorname{Log}(a^z) = \operatorname{Log}(e^{2\pi i}) = \operatorname{Log} 1 = 0 \neq 2\pi i = 2\pi i \operatorname{Log} e\,.$$