UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009
23.07.2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

14. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t < 0 \\ 2\cos(t) & \text{für } t \geqslant 0 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

a) Berechnen Sie

i) $f'(t)$ für $t \neq 0$.

ii) $\mathscr{L}\{f'\}$ direkt sowie mit Hilfe der Formel aus Abschnitt 23.12.

b) Nun wird die Distribution $T_f\colon \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ betrachtet.

i) Bestimmen Sie die distributionelle Ableitung DT_f von T_f.

ii) Ermitteln Sie T_{f_+} und $D(T_{f_+})$, wobei f_+ wie in Abschnitt 25.3 definiert sei.

iii) Berechnen Sie $\mathscr{L}\{D(T_{f_+})\}$ sowohl direkt als auch unter Verwendung der Ableitungsregel für die Laplacetransformation von Distributionen.

iv) Bestimmen Sie die verallgemeinerte Ableitung $\dot{f}$. Wie lautet $\mathscr{L}\{\dot{f}\}$?

Aufgabe 2

Seien

$$g(t) := \begin{cases} t-1 & \text{für } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{für } t < 1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad h(t) := \sigma(t-1) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Zeigen Sie anhand der Definition der distributionellen Ableitung:

a) $DT_g = T_h$;

b) $D\big(DT_g\big) = \delta_1$.

Aufgabe 3

a) Die Sprungantwort des RL-Kreises (vgl. Beispiel 23.14(a)) lautet $h(t) = \frac{L}{R}(\sigma(t) - e^{-\frac{R}{L}t})$. Berechnen Sie die zugehörige Impulsantwort.

b) Ein System besitze die Übertragungsfunktion $G(s) = \frac{6}{s^2+4}$. Geben Sie die Impulsantwort des Systems an.

c) Ein System mit Eingang u und Ausgang y sei durch die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 3y = u' + u$$

gegeben. Wie lautet die zugehörige Übertragungsfunktion? Bestimmen Sie sowohl die Impulsantwort als auch die Sprungantwort dieses Systems.

— bitte wenden —

Aufgabe 4

Berechnen Sie jeweils die Fouriertransformierte $\mathscr{F}f$ der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

a) $f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leqslant 1 \\ 0 & \text{für } |t| > 1 \end{cases}$

b) $f(t) = te^{-|t|}$

c) $f(t) = \begin{cases} \cos(t) & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

d) $f(t) = \begin{cases} \sin(t) & \text{für } 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

e) $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + 4t + 5}$

f) $f(t) = \dfrac{t}{t^4 + 2t^2 + 1}$

Aufgabe 5

Zu $\alpha > 0$ definiere

$$\varphi_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\, e^{-\frac{t^2}{2\alpha}}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\varphi_\alpha * \varphi_\beta \;=\; \varphi_{\alpha+\beta}$$

für alle $\alpha, \beta > 0$ gilt.

Aufgabe 6

Berechnen Sie mit Hilfe von Aufgabe 4 a) und des Satzes von Plancherel

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(t)}{t^2}\, dt.$$

Aufgabe 7

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ wird definiert durch $f(t) = \max\{0, 1 - t^2\}$.

a) Berechnen Sie $\mathscr{F}f(\omega)$ für alle $\omega \in \mathbb{R}$.

b) Es sei $f_n(t) := nf(nt)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F}f_n(\omega) \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}f_n(\omega).$$

Sprechstunden der Tutoren zu HM II und KAI: Montag, 14.09.09, und Dienstag, 15.09.09, jeweils von 14:00 bis 15:30 Uhr im S 11 (Mathematikgebäude 20.30).

Die **Prüfungen** zu HM II und KAI finden am **Montag, den 21.09.2009,** statt.
Anmeldeschluss ist Freitag, der 24.07.2009 (Vorlesungsende SS 2009).
Weitere Informationen zu den Prüfungen entnehmen Sie bitte unserer Vorlesungshomepage

www.mathematik.uni-karlsruhe.de/mi1weis/lehre/hm22009s/.

Viel Erfolg bei den Klausuren und danach schöne Semesterferien!