UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Institut für Analysis
HDoz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2009

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t < 0 \\ 2\cos(t) & \text{für } t \geqslant 0 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

a) **i)** Für $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist

$$f'(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0\,, \\ -2\sin(t) & \text{für } t > 0\,. \end{cases}$$

ii) Da f' beschränkt ist, ist f' von exponentieller Ordnung 0. Somit gilt für $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\mathscr{L}\{f'\}(s) = \mathscr{L}\{-2\sin(t)\} = \frac{-2}{s^2+1}\,.$$

Die Formel aus Abschnitt 23.12 liefert

$$\mathscr{L}\{f'\}(s) = s\mathscr{L}\{f\}(s) - f(0+) = s\,\frac{2s}{s^2+1} - 2 = \frac{-2}{s^2+1}\,.$$

b) Nun betrachten wir die Distribution T_f, d.h. die lineare Abbildung $T_f\colon \mathscr{D} \to \mathbb{C}$ mit

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} \varphi(t)\,dt + 2\int_0^{\infty} \cos(t)\varphi(t)\,dt\,, \qquad \varphi \in \mathscr{D}.$$

i) Gemäß Definition gilt für jedes $\varphi \in \mathscr{D}$

$$DT_f(\varphi) = T_f(-\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_{-\infty}^{0} \varphi'(t)\,dt - 2\int_0^{\infty} \cos(t)\varphi'(t)\,dt\,.$$

Mit partieller Integration folgt

$$\begin{aligned} DT_f(\varphi) &= -\lim_{a\to-\infty}\big[\varphi(t)\big]_{t=a}^{0} - 2\lim_{b\to\infty}\left(\big[\cos(t)\varphi(t)\big]_{t=0}^{b} - \int_0^b -\sin(t)\varphi(t)\,dt\right) \\ &= -\varphi(0) + 2\varphi(0) - 2\int_0^{\infty} \sin(t)\varphi(t)\,dt \\ &= \varphi(0) - 2T_{\sin_+}(\varphi) = (\delta_0 - 2T_{\sin_+})(\varphi)\,, \end{aligned}$$

wobei $\sin_+(t) := \sigma(t)\sin(t)$, $t \in \mathbb{R}$, gesetzt ist.
Alternativ kann man die Formel aus Abschnitt 25.3 verwenden

$$T_f = T_{f'} + \big(f(0+) - f(0-)\big)\delta_0 = T_{f'} + (2-1)\delta_0 = -2T_{\sin_+} + \delta_0\,.$$

(Hierbei ist f' im Sinne von 24.14 zu verstehen.)

ii) Wegen
$$f_+(t) := \sigma(t)f(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 2\cos(t) & \text{für } t \geqslant 0 \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$
ist die Distribution T_{f_+} gegeben durch
$$T_{f_+}(\varphi) = 2\int_0^\infty \cos(t)\varphi(t)\,dt\,, \qquad \varphi \in \mathscr{D}\,.$$
Für die distributionelle Ableitung von T_{f_+} ergibt sich
$$D(T_{f_+}) = T_{(f_+)'} + (f(0+) - 0)\delta_0 = -2T_{\sin_+} + 2\delta_0\,.$$
(Erneut ist $(f_+)'$ im Sinne von 24.14 zu verstehen.) Also gilt für jede Testfunktion $\varphi \in \mathscr{D}$
$$D(T_{f_+})(\varphi) = -2\int_0^\infty \sin(t)\varphi(t)\,dt + 2\varphi(0)\,.$$

iii) Da sowohl $T_{\sin_+}$ als auch δ_0 von exponentieller Ordnung 0 mit positivem Träger sind (vgl. Beispiele 25.4 (1) bzw. (2)), gilt dies auch für $D(T_{f_+}) = -2T_{\sin_+} + 2\delta_0$. Daher ist $\mathscr{L}\{D(T_{f_+})\}(s)$ für alle $\mathrm{Re}(s) > 0$ definiert mit
$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{D(T_{f_+})\}(s) &= -2\mathscr{L}\{T_{\sin_+}\}(s) + 2\mathscr{L}\{\delta_0\}(s) = -2T_{\sin_+}(t \mapsto e^{-st}) + 2\delta_0(t \mapsto e^{-st}) \\ &= -2\int_0^\infty e^{-st}\sin(t)\,dt + 2e^0 = -2\mathscr{L}\{\sin(t)\}(s) + 2 = \frac{-2}{s^2+1} + 2 \\ &= \frac{2s^2}{s^2+1}\,.\end{aligned}$$
Die Ableitungsregel für die Laplacetransformation von Distributionen aus Abschnitt 25.6 liefert für $\mathrm{Re}(s) > 0$
$$\mathscr{L}\{D(T_{f_+})\}(s) = s\mathscr{L}\{T_{f_+}\}(s) = s\mathscr{L}\{2\cos(t)\}(s) = s\,\frac{2s}{s^2+1} = \frac{2s^2}{s^2+1}\,.$$

iv) Die verallgemeinerte Ableitung $\dot{f}$ von f ist gegeben durch
$$\dot{f} = D(T_{f_+}) - f(0-)\delta_0 \overset{\textbf{ii)}}{=} \big(-2T_{\sin_+} + 2\delta_0\big) - 1\cdot\delta_0 = -2T_{\sin_+} + \delta_0\,.$$
Ferner gilt
$$\mathscr{L}\{\dot{f}\} = \mathscr{L}\{D(T_{f_+})\}(s) - f(0-)\,\mathscr{L}\{\delta_0\}(s) \overset{\textbf{iii)}}{=} \frac{2s^2}{s^2+1} - 1 = \frac{s^2-1}{s^2+1}\,.$$

Aufgabe 2

Seien
$$g(t) := \begin{cases} t-1 & \text{für } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{für } t < 1 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad h(t) := \sigma(t-1) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

a) Um $DT_g = T_h$ nachzuweisen, muss man $DT_g(\varphi) = T_h(\varphi)$ für jedes $\varphi \in \mathscr{D}$ zeigen. Ist $\varphi \in \mathscr{D}$, so gibt es $b \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) = 0$ für alle $t \geqslant b$. Nach Definition der Ableitung von Distributionen gilt
$$\begin{aligned}DT_g(\varphi) &= T_g(-\varphi') = -\int_{-\infty}^\infty g(t)\varphi'(t)\,dt = -\int_1^\infty (t-1)\varphi'(t)\,dt \\ &= -\int_1^b (t-1)\varphi'(t)\,dt \overset{\text{part. Int.}}{=} -\left(\big[(t-1)\varphi(t)\big]_1^b - \int_1^b \varphi(t)\,dt\right) \\ &= \int_1^b \varphi(t)\,dt = \int_1^\infty \varphi(t)\,dt = \int_{-\infty}^\infty \sigma(t-1)\varphi(t)\,dt = T_h(\varphi)\,.\end{aligned}$$

b) Hier muss man $D(DT_g)(\varphi) = \delta_1(\varphi)$ für jedes $\varphi \in \mathscr{D}$ nachrechnen. Ist $\varphi \in \mathscr{D}$ und $b \in \mathbb{R}$ mit $\varphi(t) = 0$ für alle $t \geqslant b$, so gilt

$$\begin{aligned} D(DT_g)(\varphi) &\overset{\text{a)}}{=} D(T_h)(\varphi) = T_h(-\varphi') = -\int_{-\infty}^{\infty} \sigma(t-1)\varphi'(t)\,dt \\ &= -\int_1^{\infty} \varphi'(t)\,dt = -\int_1^b \varphi'(t)\,dt = -\big[\varphi(t)\big]_1^b = -\big(\varphi(b) - \varphi(1)\big) \\ &= \varphi(1) = \delta_1(\varphi)\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Da die Impulsantwort g die distributionelle Ableitung der Sprungantwort T_h mit $h(t) = \frac{L}{R}\,\sigma(t)(1-e^{-\frac{R}{L}t})$, $t \in \mathbb{R}$, ist, erhalten wir für die Impulsantwort des Systems $g = T_{t \mapsto \sigma(t)e^{-\frac{R}{L}t}}$.

b) Wegen $G(s) = 3\,\frac{2}{s^2+2^2} = \mathscr{L}\{3\sin(2t)\}(s)$ ist $g(t) = 3\,\sigma(t)\sin(2t)$, $t \in \mathbb{R}$, die Impulsantwort des Systems.

c) Ein System mit Input u und Output y sei durch die Differentialgleichung

$$y'' + 4y' + 3y = u' + u$$

gegeben. Die Impulsantwort g des Systems ist der Output des Systems, wenn man als Input $u = \delta_0$ anlegt. Nach 25.6 erhalten wir für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\mathrm{Re}(s)$

$$\big(s^2 + 4s + 3\big)\mathscr{L}\{g\}(s) = (s+1)\mathscr{L}\{\delta_0\}(s) = s + 1\,.$$

Damit ergibt sich für die Übertragungsfunktion des Systems

$$G(s) := \mathscr{L}\{g\}(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+3} = \frac{s+1}{(s+1)(s+3)} = \frac{1}{s+3}\,,$$

so dass $g(t) = \sigma(t)e^{-3t}$, $t \in \mathbb{R}$, die Impulsantwort des Systems ist.

Die Sprungantwort h genügt der Gleichung

$$\big(s^2 + 4s + 3\big)\mathscr{L}\{h\}(s) = (s+1)\mathscr{L}\{\sigma\}(s)$$

bzw.

$$\mathscr{L}\{h\}(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+3}\,\mathscr{L}\{\sigma\}(s) = G(s) \cdot \frac{1}{s}\,.$$

Wegen

$$G(s) \cdot \frac{1}{s} = \frac{1}{s+3} \cdot \frac{1}{s} = \frac{1/3}{s} - \frac{1/3}{s+3} = \mathscr{L}\Big\{\frac{1}{3}(1 - e^{-3t})\Big\}(s)$$

lautet die Sprungantwort des Systems: $h(t) = \frac{1}{3}\sigma(t)(1 - e^{-3t})$, $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4

a) Für $\omega \neq 0$ gilt

$$\mathscr{F}f(\omega) = \int_{-1}^{1} e^{-i\omega t}\,dt = \Big[\frac{1}{-i\omega}\,e^{-i\omega t}\Big]_{t=-1}^{1} = \frac{1}{i\omega}\big(e^{i\omega} - e^{-i\omega}\big) = 2\,\frac{\sin(\omega)}{\omega}\,.$$

Für $\omega = 0$ ist

$$\mathscr{F}f(0) = \int_{-1}^{1} 1\,dt = 2\,.$$

b) Definitionsgemäß gilt für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F} f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} f(t)\, dt = \int_{0}^{\infty} te^{-t} e^{-i\omega t}\, dt + \int_{-\infty}^{0} te^{t} e^{-i\omega t}\, dt\,.$$

Wegen $\int te^{\alpha t}\, dt = te^{\alpha t}/\alpha - \int e^{\alpha t}/\alpha\, dt = te^{\alpha t}/\alpha - e^{\alpha t}/\alpha^2$ erhält man für $c > 0$

$$\begin{aligned}\int_0^c te^{-t} e^{-i\omega t}\, dt &= \int_0^c te^{-t(1+i\omega)}\, dt = \left[\frac{te^{-t(1+i\omega)}}{-(1+i\omega)} - \frac{e^{-t(1+i\omega)}}{(1+i\omega)^2}\right]_{t=0}^{c} \\ &= \left(\frac{ce^{-c(1+i\omega)}}{-(1+i\omega)} - \frac{e^{-c(1+i\omega)}}{(1+i\omega)^2}\right) - \left(0 - \frac{1}{(1+i\omega)^2}\right) \xrightarrow{c\to\infty} \frac{1}{(1+i\omega)^2}\,,\end{aligned}$$

wobei man $|e^{-c(1+i\omega)}| = e^{-c}$ beachten muss. Für das zweite Integral ergibt sich analog $\int_{-\infty}^{0} te^{t(1-i\omega)}\, dt = \int_0^\infty (-\tau)e^{-\tau(1-i\omega)}\, d\tau = -(1-i\omega)^{-2}$, d.h. wir haben

$$\mathscr{F} f(\omega) = \frac{1}{(1+i\omega)^2} - \frac{1}{(1-i\omega)^2} = \frac{(1-i\omega)^2 - (1+i\omega)^2}{(1+\omega^2)^2} = \frac{-4i\omega}{(1+\omega^2)^2}\,.$$

Alternativ: Da $t \mapsto te^{-|t|}$ absolut integrierbar ist, ist $\mathscr{F}\{e^{-|t|}\}$ nach 26.3 (e) differenzierbar und für jedes $\omega \in \mathbb{R}$ gilt

$$\frac{d}{d\omega}\mathscr{F}\{e^{-|t|}\}(\omega) = \mathscr{F}\{(-it)e^{-|t|}\}(\omega) = -i\mathscr{F}\{te^{-|t|}\}(\omega)$$

bzw.

$$\mathscr{F}\{te^{-|t|}\}(\omega) = i\,\frac{d}{d\omega}\mathscr{F}\{e^{-|t|}\}(\omega) \overset{\text{Bsp. in 26.2}}{=} i\,\frac{d}{d\omega}\frac{2}{1+\omega^2} = \frac{-4i\omega}{(1+\omega^2)^2}\,.$$

c) Wegen $\cos(t) = \frac{1}{2}(e^{it} + e^{-it})$, $t \in \mathbb{R}$, ergibt sich für jedes $\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F} f(\omega) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{-i\omega t}\cos(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(e^{i(1-\omega)t} + e^{-i(1+\omega)t}\right) dt\,.$$

Für $\omega \neq \pm 1$ bekommen wir

$$\begin{aligned}\mathscr{F} f(\omega) &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{i(1-\omega)}\, e^{i(1-\omega)t} - \frac{1}{i(1+\omega)}\, e^{-i(1+\omega)t}\right]_{t=-\pi/2}^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{i(1-\omega)}\left(e^{i(1-\omega)\frac{\pi}{2}} - e^{-i(1-\omega)\frac{\pi}{2}}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{i(1+\omega)}\left(e^{-i(1+\omega)\frac{\pi}{2}} - e^{i(1+\omega)\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-\omega}\left(e^{-i\omega\frac{\pi}{2}} + e^{i\omega\frac{\pi}{2}}\right) - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\omega}\left(-e^{-i\omega\frac{\pi}{2}} - e^{i\omega\frac{\pi}{2}}\right) \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1+\omega)(e^{-i\omega\frac{\pi}{2}} + e^{i\omega\frac{\pi}{2}}) - \frac{1}{2}(1-\omega)(-e^{-i\omega\frac{\pi}{2}} - e^{i\omega\frac{\pi}{2}})}{1-\omega^2} \\ &= \frac{2\,\frac{1}{2}(e^{-i\omega\frac{\pi}{2}} + e^{i\omega\frac{\pi}{2}})}{1-\omega^2} = \frac{2\cos(\omega\frac{\pi}{2})}{1-\omega^2}\,.\end{aligned}$$

Im Fall $\omega = 1$ ist

$$\mathscr{F} f(1) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1 + e^{-2it}\right) dt = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{-2i}\, e^{-2it}\right]_{t=-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}$$

und für $\omega = -1$ gilt

$$\mathscr{F} f(-1) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(e^{2it} + 1\right) dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2i}\, e^{2it}\right]_{t=-\pi/2}^{\pi/2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

d) Wir verwenden das Resultat 26.3 (b) der Vorlesung. Ist

$$g(t) := \begin{cases} \cos(t) & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

gesetzt, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ (vgl. Additionstheorem des cos)

$$\begin{aligned} g(t-\pi/2) &= \begin{cases} \cos(t-\pi/2) & \text{für } -\frac{\pi}{2} \leqslant t-\pi/2 \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} \sin(t) & \text{für } 0 \leqslant t \leqslant \pi \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= f(t)\,. \end{aligned}$$

Mit der Rechenregel 26.3 (b) folgt für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F} f(\omega) = \mathscr{F}\{g(t-\pi/2)\}(\omega) = e^{-i\omega\frac{\pi}{2}} \mathscr{F} g(\omega)\,.$$

Gemäß **c)** gilt für $\omega \neq \pm 1$

$$\begin{aligned} \mathscr{F} f(\omega) &= e^{-i\omega\frac{\pi}{2}} \mathscr{F} g(\omega) = e^{-i\omega\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(\frac{\pi}{2}\omega)}{1-\omega^2} = e^{-i\omega\frac{\pi}{2}} \left(e^{i\frac{\pi}{2}\omega} + e^{-i\frac{\pi}{2}\omega}\right) \frac{1}{1-\omega^2} \\ &= \left(1 + e^{-i\pi\omega}\right) \frac{1}{1-\omega^2} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathscr{F} f(1) &= e^{-i\cdot 1\cdot\frac{\pi}{2}} \mathscr{F} g(1) = -i\,\frac{\pi}{2}\,, \\ \mathscr{F} f(-1) &= e^{-i\cdot(-1)\cdot\frac{\pi}{2}} \mathscr{F} g(-1) = i\,\frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

e) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(t) = \frac{1}{t^2+4t+5} = \frac{1}{(t+2)^2+1} = g(t+2)$$

mit

$$g(t) := \frac{1}{1+t^2} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Wir berechnen zunächst $\mathscr{F} g$ und argumentieren zur Bestimmung von $\mathscr{F} f$ mit der Verschiebungsregel 26.3 (b) der Fouriertransformation.

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für die Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(t) := e^{-|t|}$, gilt

$$\mathscr{F} h(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}\,, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

Gesucht ist also $\mathscr{F} g = \frac{1}{2}\mathscr{F}\{\mathscr{F} h\}$. h ist stetig, beschränkt und absolut integrierbar. Ferner ist $\mathscr{F} h$ absolut integrierbar, denn $\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F} h(\omega)|\,d\omega = 2\int_0^\infty \frac{1}{1+\omega^2}\,d\omega = 2\lim_{b\to\infty}[\arctan\omega]_0^b = \pi$. Damit sind die Voraussetzungen der Fourierinversionsformel für h erfüllt. Diese besagt

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega} \mathscr{F} h(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\mathscr{F}\{\mathscr{F} h\}(-t) \quad \text{für jedes } t \in \mathbb{R}.$$

Zusammenfassend haben wir

$$\mathscr{F} g(\omega) = \frac{1}{2}\mathscr{F}\{\mathscr{F} h\}(\omega) = \frac{1}{2}\,2\pi\,h(-\omega) = \pi\,e^{-|-\omega|} = \pi\,e^{-|\omega|}\,, \qquad \omega \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Schließlich liefert die Verschiebungsregel 26.3 (b)

$$\mathscr{F} f(\omega) = \mathscr{F}\{g(t+2)\}(\omega) = e^{-i\omega(-2)} \mathscr{F} g(\omega) \overset{(*)}{=} \pi\,e^{2i\omega-|\omega|}\,, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

f) Für jedes $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(t) = \frac{t}{t^4 + 2t^2 + 1} = -\frac{1}{2}\,\frac{-2t}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\,g'(t)\,,$$

wobei g wie im e)-Teil definiert ist.

Da g stetig, differenzierbar und absolut integrierbar sowie g' stetig und absolut integrierbar ist, gilt nach 26.3 (d)

$$\mathscr{F} f(\omega) = -\frac{1}{2}\,\mathscr{F} g'(\omega) = -\frac{1}{2}\,i\omega\,\mathscr{F} g(\omega) \overset{(*)}{=} -\frac{1}{2}\,i\omega\pi\, e^{-|\omega|}\,.$$

Aufgabe 5

Zu $\alpha > 0$ definiere

$$\varphi_\alpha \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad \varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\, e^{-\frac{t^2}{2\alpha}}\,.$$

Wie in Beispiel 26.4 der Vorlesung gesehen, ist

$$\mathscr{F}\{e^{-t^2/2}\}(\omega) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\omega^2/2}\,, \qquad \omega \in \mathbb{R},$$

bzw. mit $\varphi_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-t^2/2}$, $t \in \mathbb{R}$, ausgedrückt

$$\mathscr{F}\varphi_1(\omega) = e^{-\omega^2/2}\,, \qquad \omega \in \mathbb{R}.$$

Für jedes $\alpha > 0$ gilt

$$\varphi_\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\, e^{-\frac{t^2}{2\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(t/\sqrt{\alpha})^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\varphi_1(t/\sqrt{\alpha})\,, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Mit den Rechenregeln der Fouriertransformation folgt für jedes $\omega \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\varphi_\alpha(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\mathscr{F}\{\varphi_1(t/\sqrt{\alpha})\}(\omega) \overset{26.3\,(a)}{=} \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\,\frac{1}{1/\sqrt{\alpha}}\,\mathscr{F}\varphi_1\Big(\frac{\omega}{1/\sqrt{\alpha}}\Big)\\ &= \mathscr{F}\varphi_1(\sqrt{\alpha}\,\omega) = e^{-\alpha\omega^2/2}\,.\end{aligned}$$

Für alle $\alpha, \beta > 0$ sind φ_α, φ_β stetig, beschränkt und absolut integrierbar. Nach 26.6 ist damit auch $\varphi_\alpha * \varphi_\beta$ stetig, beschränkt und absolut integrierbar, und es gilt für alle $\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F}(\varphi_\alpha * \varphi_\beta)(\omega) = \mathscr{F}(\varphi_\alpha)(\omega) \cdot \mathscr{F}(\varphi_\beta)(\omega) = e^{-\alpha\omega^2/2} \cdot e^{-\beta\omega^2/2} = e^{-(\alpha+\beta)\omega^2/2} = \mathscr{F}(\varphi_{\alpha+\beta})(\omega)\,.$$

Sowohl $\varphi_\alpha * \varphi_\beta$ als auch $\varphi_{\alpha+\beta}$ sind stetig, beschränkt und absolut integrierbar. Da ferner $\mathscr{F}(\varphi_\alpha * \varphi_\beta)$ sowie $\mathscr{F}(\varphi_{\alpha+\beta})$ absolut integrierbar sind, sind die Voraussetzungen der Inversionsformel 26.8 für die Funktionen $\varphi_\alpha * \varphi_\beta$ bzw. $\varphi_{\alpha+\beta}$ erfüllt. Diese liefert für jedes $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_\alpha * \varphi_\beta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega}\,\mathscr{F}(\varphi_\alpha * \varphi_\beta)(\omega)\,d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega}\,\mathscr{F}(\varphi_{\alpha+\beta})(\omega)\,d\omega = \varphi_{\alpha+\beta}(t)\,.$$

Aufgabe 6

Sei $f(t) := \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leqslant 1 \\ 0 & \text{für } |t| > 1 \end{cases}$. Wie in Aufgabe **4 a)** gesehen, gilt für die Fouriertransformierte von f

$$\mathscr{F} f(\omega) = \begin{cases} 2\,\frac{\sin(\omega)}{\omega} & \text{für } \omega \neq 0\,, \\ 2 & \text{für } \omega = 0\,. \end{cases}$$

Wir verwenden den Satz von Plancherel: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, absolut integrierbar und gilt $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt < \infty$, so ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F} f(\omega)|^2\,d\omega\,.$$

Für die oben definierte Funktion f sind die Voraussetzungen erfüllt; also gilt

$$2 = \int_{-1}^{1} 1\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}f(\omega)|^2\,d\omega = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}\,d\omega$$

bzw.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}\,d\omega = \pi\,.$$

Da $\omega \mapsto \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}$ eine gerade Funktion ist (denn $\frac{\sin^2(-\omega)}{(-\omega)^2} = \frac{(-\sin(\omega))^2}{\omega^2} = \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}$), ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}\,d\omega = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}\,d\omega$$

und damit

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin^2(\omega)}{\omega^2}\,d\omega = \frac{\pi}{2}\,.$$

Aufgabe 7

a) Da $f(t) = 0$ für alle t mit $t^2 > 1 \iff |t| > 1$ gilt, erhalten wir für jedes $\omega \in \mathbb{R}$

$$\mathscr{F}f(\omega) = \int_{-1}^{1} f(t)e^{-i\omega t}\,dt = \int_{-1}^{1} (1-t^2)e^{-i\omega t}\,dt\,.$$

Speziell für $\omega = 0$ ergibt sich

$$\mathscr{F}f(0) = \int_{-1}^{1} (1-t^2)\,dt = \Big[t - \frac{1}{3}t^3\Big]_{t=-1}^{1} = \frac{2}{3} - \Big(-\frac{2}{3}\Big) = \frac{4}{3}\,.$$

Für $\omega \neq 0$ liefert zweimalige partielle Integration

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}f(\omega) &= \left[(1-t^2)\cdot\frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega}\right]_{t=-1}^{1} - \int_{-1}^{1} 2t\cdot\frac{e^{-i\omega t}}{i\omega}\,dt \\
&= 0 - \left[2t\cdot\frac{e^{-i\omega t}}{-(i\omega)^2}\right]_{t=-1}^{1} + \int_{-1}^{1} 2\,\frac{e^{-i\omega t}}{-(i\omega)^2}\,dt \\
&= -2\,\frac{e^{-i\omega}+e^{i\omega}}{\omega^2} + 2\left[\frac{e^{-i\omega t}}{(i\omega)^3}\right]_{t=-1}^{1} = -\frac{4\cos\omega}{\omega^2} + 2\,\frac{e^{-i\omega}-e^{i\omega}}{-i\omega^3} \\
&= -\frac{4\cos\omega}{\omega^2} + \frac{4\sin\omega}{\omega^3} = \frac{-4\omega\cos\omega + 4\sin\omega}{\omega^3}\,.
\end{aligned}$$

b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathscr{F}f_n(\omega) = n\cdot\mathscr{F}\{f(nt)\}(\omega) \overset{26.3\,(a)}{=} n\cdot\frac{1}{n}\mathscr{F}f(\omega/n) = \mathscr{F}f(\omega/n)\,, \qquad \omega\in\mathbb{R}.$$

Unter Verwendung der in **a)** gefundenen Ergebnisse erhalten wir $\mathscr{F}f_n(0) = \mathscr{F}f(0) = 4/3$ und

$$\mathscr{F}f_n(\omega) = \frac{-4(\omega/n)\cos(\omega/n) + 4\sin(\omega/n)}{(\omega/n)^3} = \frac{-4n^2\omega\cos(\omega/n) + 4n^3\sin(\omega/n)}{\omega^3}$$

für $\omega \neq 0$. Da f (stückweise) stetig und absolut integrierbar ist, ist $\mathscr{F}f$ nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue stetig. Daher ergibt sich für jedes $\omega \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty}\mathscr{F}f_n(\omega) = \lim_{n\to\infty}\mathscr{F}f(\omega/n) = \mathscr{F}f(0) = \frac{4}{3}\,.$$