Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2010
15.04.2010

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben. Zeigen Sie:

i) Die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ sind linear abhängig.

ii) Es gibt keine Zahlen $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $\vec{v}_2 = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_3 \vec{v}_3$.

b) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind.

Aufgabe 2

a) Zeigen Sie, dass die durch $f(x) := 2$, $g(x) := x - 1$ und $h(x) := x^2 + 3x$ definierten Funktionen f, g und h aus $C^0([0,1])$ linear unabhängig sind.

b) Sei $P_2([0,1]) := \{p\colon [0,1] \to \mathbb{C} \mid p \text{ ist Polynom vom Grad } \leqslant 2\}$. Begründen Sie, dass (f, g, h) eine Basis von $P_2([0,1])$ bildet.

c) Wie lauten die Koordinaten des durch $p(x) = 8x^2 + 2x + 2$, $x \in [0,1]$, gegebenen Polynoms p bzgl. der Basis (f, g, h)?

Aufgabe 3

a) Seien $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$ an.

b) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die folgenden Vektoren aus $\mathbb{C}^3$ an:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

— bitte wenden —

Aufgabe 4

Es sei V ein unitärer Vektorraum. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

a) Seien $v_1, \dots, v_n$ beliebige Vektoren aus V. Dann sind $v_1, \dots, v_n, 0$ linear abhängig.

b) Sind $x, y \in V$ linear unabhängig und sind $x, z \in V$ linear unabhängig, so sind auch y, z linear unabhängig.

c) Sind $x, y, z \in V$ linear abhängig, so existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $z = \alpha x + \beta y$.

d) Ist $x \in V$ und gilt $\langle x, y \rangle = 0$ für alle $y \in V$, so folgt $x = 0$.

e) Es seien $x_1, \dots, x_n, y \in V$. Ist $y \neq 0$ und ist y orthogonal zu jedem Vektor aus $\mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_n)$, so folgt $\mathrm{Lin}(x_1, \dots, x_n) \neq V$.

Aufgabe 5

a) Gegeben seien die Vektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie $\vec{x} \times \vec{y}$, $(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{x}$, den Winkel, den die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ einschließen, sowie den Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms.

b) Seien $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$. Gilt $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{b}) \times (\vec{a} \cdot \vec{c})$?

Klausurtermine im Sommersemester 2010:

Übungsklausur zu HM II:	Samstag,	03.07.2010,	08:00 - 10:00 Uhr
Klausur zu HM II (Phys. & Geod.):	Montag,	20.09.2010,	08:00 - 10:00 Uhr
Klausur zu HM II (Etec):	Montag,	20.09.2010,	08:00 - 09:30 Uhr
Klausur zu KAI (Etec):	Montag,	20.09.2010,	10:30 - 11:30 Uhr

Details zur Prüfungsanmeldung werden in Kürze bekannt gegeben.