Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2010
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Im $\mathbb{R}^4$ sind die Vektoren $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ gegeben.

i) Offenbar ist $\vec{v}_1 = -2\vec{v}_3$. Daher gilt $\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 = 0$, d.h. es gibt eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors. Also sind die Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ linear abhängig.

Im allgemeinen erkennt man nicht sofort, ob gegebene Vektoren linear unabhängig sind oder nicht. Um die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ auf lineare Unabhängigkeit zu prüfen, können wir $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ als Zeilen in eine Matrix schreiben und diese durch Zeilenumformungen auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 8 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[vertausche erste und zweite Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

[multipliziere die dritte Zeile mit 2]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & -8 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

[ersetze die dritte Zeile durch die Summe der zweiten und dritten Zeile]

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 2 & -1 \\ 0 & 8 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da die Zeilen der letzten Matrix linear abhängig sind, sind es $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ auch.

ii) Wäre $\vec{v}_2 = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_3\vec{v}_3$ für $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$, so müsste für die erste Komponente gelten: $3 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_3 \cdot 0 = 0$. Dies ist nicht möglich. Deshalb gibt es keine $\alpha_1, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $\vec{v}_2 = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_3\vec{v}_3$.

b) Seien $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit $\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \alpha_3\vec{v}_3 = 0$, also mit

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} \alpha_1 & & +\ \alpha_3 a & = & 0 \\ & \alpha_2 & +\ \alpha_3 & = & 0 \\ \alpha_1 & -\ \alpha_2 & +\ \alpha_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

bzw. äquivalent hierzu

$$\begin{cases} \alpha_1 &= -a\alpha_3 \\ \alpha_2 &= -\alpha_3 \\ \alpha_1 &= \alpha_2 - \alpha_3 \overset{\alpha_2=-\alpha_3}{=} -\alpha_3 - \alpha_3 = -2\alpha_3 \end{cases}$$

Somit gibt es nur für $a = 2$ eine Lösung, die sich von $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ unterscheidet (z.B. $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1$, dann gilt $2\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - \vec{v}_3 = \vec{0}$).

Also sind die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ nur für $a = 2$ linear abhängig.

Aufgabe 2

a) Der Nullvektor in $C^0([0,1])$ ist die Nullfunktion $n\colon [0,1] \to \mathbb{C}, x \mapsto 0$. Die Funktionen f, g, h sind genau dann linear unabhängig, wenn aus $\alpha f + \beta g + \gamma h = n$ stets $\alpha = \beta = \gamma = 0$ folgt, also wenn aus $\alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ stets $\alpha = \beta = \gamma = 0$ folgt.

Seien also $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ mit $\alpha \cdot 2 + \beta(x-1) + \gamma(x^2+3x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$, d.h. $(2\alpha - \beta) + (\beta + 3\gamma)x + \gamma x^2 = 0$ für alle $x \in [0,1]$. Sind $p_k\colon [0,1] \to \mathbb{C}, x \mapsto x^k$ für $k = 0,1,2$ definiert, so lässt sich dies schreiben als $(2\alpha - \beta)p_0 + (\beta + 3\gamma)p_1 + \gamma p_2 = n$. Da die Monome p_0, p_1, p_2 in $C^0([0,1])$ linear unabhängig sind, kann man den Nullvektor, d.h. die Nullfunktion n, nur als triviale Linearkombination von p_0, p_1, p_2 schreiben, so dass $2\alpha - \beta = \beta + 3\gamma = \gamma = 0$ folgt. Hieraus ergibt sich sofort $\gamma = 0$ und daher $\beta + 3 \cdot 0 = 0$, also $\beta = 0$, was schließlich auf $\alpha = 0$ führt. Damit ist die lineare Unabhängigkeit von f, g, h gezeigt.

b) (f, g, h) bildet eine Basis von $P_2([0,1]) = \mathrm{Lin}(p_0, p_1, p_2)$, weil $\dim P_2([0,1]) = 3$ ist und die drei Vektoren $f, g, h \in P_2([0,1])$ linear unabhängig sind.

c) Für jedes $x \in [0,1]$ gilt $p(x) = 8x^2 + 2x + 2 = 8(x^2 + 3x) - 22x + 2 = 8h(x) - 22(x-1) - 20 = 8h(x) - 22g(x) - 10f(x)$. Daher ist $p = 8h - 22g - 10f$, so dass die Koordinaten von p bzgl. der Basis (f, g, h) durch $(-10, -22, 8)$ gegeben sind.

Dafür ist auch die Notation $\begin{pmatrix} -10 \\ -22 \\ 8 \end{pmatrix}_{(f,g,h)}$ gebräuchlich.

Bemerkung: Die Reihenfolge der Basiselemente ist bei der Angabe der Koordinaten von entscheidender Bedeutung. So lauten beispielsweise die Koordinaten von p bzgl. der Basis (g, h, f): $(-22, 8, -10)$.

Aufgabe 3

Wiederholung des Gram-Schmidt-Verfahrens:
In einem unitären Vektorraum V seien n linear unabhängige Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ gegeben. Wir wollen ein Orthonormalsystem $u_1, \ldots, u_n \in V$ so konstruieren, dass $\mathrm{Lin}(x_1, \ldots, x_j) = \mathrm{Lin}(u_1, \ldots, u_j)$ für alle $j = 1, \ldots, n$ gilt.
Wir bestimmen zunächst nur ein Orthogonalsystem $v_1, \ldots, v_n$ mit der Eigenschaft $\mathrm{Lin}(x_1, \ldots, x_j) = \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_j)$. (Bei einem Orthogonalsystem wird nur verlangt, dass die Vektoren orthogonal zueinander sind, nicht aber, dass sie Norm 1 haben.) Die Forderung $\mathrm{Lin}(x_1) = \mathrm{Lin}(v_1)$ können wir erfüllen, indem wir $v_1 := x_1$ setzen. Dann geht unser Verfahren rekursiv weiter: Haben wir für ein gewisses j ein Orthogonalsystem $v_1, \ldots, v_j$ mit $\mathrm{Lin}(x_1, \ldots, x_j) = \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_j)$ gefunden, so ist die Frage, wie wir v_{j+1} definieren sollen. Setzen wir

$$v_{j+1} := x_{j+1} + \sum_{k=1}^{j} \lambda_k v_k$$

mit gewissen $\lambda_k \in \mathbb{C}$, so ist die Forderung $\mathrm{Lin}(x_1, \ldots, x_{j+1}) = \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_{j+1})$ erfüllt, da wir ja $L(x_1, \ldots, x_j) = L(v_1, \ldots, v_j)$ voraussetzen. Damit dieses v_{j+1} zusätzlich orthogonal zu allen v_i mit

$1 \leqslant i \leqslant j$ ist, muss

$$0 = \langle v_{j+1}, v_i \rangle = \langle x_{j+1}, v_i \rangle + \sum_{k=1}^{j} \lambda_k \langle v_k, v_i \rangle = \langle x_{j+1}, v_i \rangle + \lambda_i \langle v_i, v_i \rangle$$

für $1 \leqslant i \leqslant j$ gelten. Folglich wählen wir

$$\lambda_i := -\frac{\langle x_{j+1}, v_i \rangle}{\langle v_i, v_i \rangle} = -\frac{\langle x_{j+1}, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} \, .$$

Fassen wir zusammen: Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ werden rekursiv definiert durch

$$v_1 := x_1 \, , \qquad v_{j+1} := x_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} \frac{\langle x_{j+1}, v_k \rangle}{\|v_k\|^2} v_k \quad (j = 1, \ldots, n-1) \, .$$

Man beachte: Die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ sind nach Voraussetzung linear unabhängig; daher gilt $x_1 \neq 0$ und $x_{j+1} \notin \mathrm{Lin}(x_1, \ldots, x_j) = \mathrm{Lin}(v_1, \ldots, v_j)$ für $j = 0, \ldots, n-1$, und damit folgt $v_j \neq 0$ für alle j. Somit ist die Division durch $\|v_k\|^2$ möglich.
Setzen wir nun noch $u_j := v_j / \|v_j\|$, so haben wir das gesuchte Orthonormalsystem.

a) Wir wollen das Verfahren von Gram-Schmidt benutzen. Dazu prüfen wir zuerst die gegebenen Vektoren $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ auf lineare Unabhängigkeit. Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ mit

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \left\{ \begin{array}{rrrcll} \alpha & +5\beta & -3\gamma & = & 0 & (1) \\ -\alpha & +\beta & -3\gamma & = & 0 & (2) \\ \alpha & +\beta & +\gamma & = & 0 & (3) \\ -\alpha & +\beta & -3\gamma & = & 0 & (4) \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrcll} \alpha & +5\beta & -3\gamma & = & 0 & (1) \\ & 6\beta & -6\gamma & = & 0 & (1)+(2) \\ & 4\beta & -4\gamma & = & 0 & (1)-(3) \\ & & 0 & = & 0 & (4)-(2) \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrcl} \alpha & +5\beta & -3\gamma & = & 0 \\ & \beta & -\gamma & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right.$$

Somit sind die Vektoren $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ linear abhängig, etwa $-2\vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3 = \vec{0}$. Insbesondere ist $\vec{y}_3 = 2\vec{y}_1 - \vec{y}_2 \in \mathrm{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$, woraus $\mathrm{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3) = \mathrm{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ folgt. Der obigen Rechnung können wir auch entnehmen, dass $\vec{y}_1, \vec{y}_2$ linear unabhängig sind (Nehme anfangs $\gamma = 0$). Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $\mathrm{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2)$ führen wir nun das Verfahren von Gram-Schmidt durch:

$$\vec{v}_1 := \vec{y}_1, \quad \vec{u}_1 := \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{\vec{v}_1}{\sqrt{1+1+1+1}} = \frac{1}{2}\vec{y}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Den zweiten Vektor setzen wir $\vec{v}_2 := \vec{y}_2 - a\vec{u}_1$ mit $a = \langle \vec{y}_2, \vec{u}_1 \rangle = \frac{1}{2}(5 - 1 + 1 - 1) = 2$. Also

$$\vec{v}_2 := \vec{y}_1 - 2\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 := \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{24}} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Folglich ist $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2) = \mathrm{Lin}(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3)$.

b) Man sieht leicht, dass die gegebenen Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ linear unabhängig sind (Wie geht das genau?). Es gilt

$$\vec{v}_1 := \vec{x}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_1 := \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},$$

und wegen

$$\langle \vec{x}_2, \vec{v}_1\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}2\\2i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 2\cdot\overline{1} + 2i\cdot\overline{0} + 0\cdot\overline{1} = 2$$

erhalten wir

$$\vec{v}_2 := \vec{x}_2 - \frac{\langle \vec{x}_2, \vec{v}_1\rangle}{\|\vec{v}_1\|^2}\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\2i\\0\end{pmatrix} - \frac{2}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2i\\-1\end{pmatrix}, \qquad \vec{u}_2 := \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2i\\-1\end{pmatrix}.$$

(Beachte: Es gilt $\|\vec{v}_2\| = (|1|^2 + |2i|^2 + |-1|^2)^{1/2} = \sqrt{6}$.) Für die Berechnung von $\vec{v}_3$ brauchen wir die Skalarprodukte

$$\langle \vec{x}_3, \vec{v}_1\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}5\\3i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\rangle = 5\cdot\overline{1} + 3i\cdot\overline{0} + 1\cdot\overline{1} = 6,$$

$$\langle \vec{x}_3, \vec{v}_2\rangle = \left\langle \begin{pmatrix}5\\3i\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2i\\-1\end{pmatrix} \right\rangle = 5\cdot\overline{1} + 3i\cdot\overline{2i} + 1\cdot\overline{(-1)} = 5 - 6i^2 - 1 = 10.$$

Damit ergibt sich dann

$$\vec{v}_3 := \vec{x}_3 - \sum_{k=1}^{2}\frac{\langle \vec{v}_3, \vec{v}_k\rangle}{\|\vec{v}_k\|^2}\vec{v}_k = \begin{pmatrix}5\\3i\\1\end{pmatrix} - \frac{6}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - \frac{10}{6}\begin{pmatrix}1\\2i\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-i\\-1\end{pmatrix},$$

$$\vec{u}_3 := \frac{\vec{v}_3}{\|\vec{v}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-i\\-1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

a) Die Aussage ist wahr, denn der Nullvektor $\mathbf{0}$ lässt sich als nichttriviale Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n, \mathbf{0}$ darstellen, z.B. durch $0\cdot v_1 + \ldots + 0\cdot v_n + 1\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Hier haben wir zur Verdeutlichung $\mathbf{0}$ für den Nullvektor in V und 0 für die Zahl Null geschrieben.

b) Die Aussage ist falsch: Wir betrachten den Vektorraum $V := \mathbb{C}^2$. Dort sind $\vec{x} := \vec{e}_1 = (1,0)$ und $\vec{y} := \vec{e}_2 = (0,1)$ linear unabhängig, und genauso $\vec{x}$ und $\vec{z} := \vec{e}_2 = (0,1)$. Die Vektoren $\vec{y}$ und $\vec{z}$ sind jedoch nicht linear unabhängig, denn $\vec{y} - \vec{z} = \vec{0}$ ist eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

c) Die Aussage ist falsch: Gegenbeispiel siehe Aufgabe **1 a)**. Alternativ kann man auch $V := \mathbb{C}^1$ mit $x := 0$, $y := 0$ und $z := i$ betrachten.

d) Die Aussage ist richtig: Da die Gleichung für alle $y \in V$ gilt, also insbesondere für $y = x$, haben wir $\langle x, x\rangle = 0$. Nach Definition des Skalarprodukts kann dies aber nur für $x = 0$ der Fall sein.

e) Die Aussage ist wahr: Wäre nämlich $\mathrm{Lin}(x_1, \ldots, x_n) = V$, so hätten wir $\langle y, x\rangle = 0$ für alle $x \in V$. Aus **d)** folgte dann unmittelbar $y = 0$, im Widerspruch zur Voraussetzung $y \neq 0$.

Aufgabe 5

a) Für $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ gilt

$$\vec{x} \times \vec{y} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 2-4 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix},$$

$$(\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot 1 = 0$$

[dieses Ergebnis war zu erwarten, weil stets $\vec{x} \times \vec{y}$ sowohl orthogonal auf $\vec{x}$ als auch orthogonal auf $\vec{y}$ steht]. Für den Winkel φ, den die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ einschließen, gilt

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \, \|\vec{y}\|} = \frac{-2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot (-2)}{\sqrt{4+1+1} \cdot \sqrt{4+4}} = \frac{-6}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}} = -\sqrt{\frac{6}{8}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Hieraus folgt $\varphi = \frac{5\pi}{6}$. Der Flächeninhalt des von $\vec{x}$ und $\vec{y}$ aufgespannten Parallelogramms lautet

$$\|\vec{x} \times \vec{y}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+4+4} = 2\sqrt{3}.$$

b) Die linke Seite der Gleichung ist zwar definiert (eine Zahl), doch rechts steht das Kreuzprodukt zweier reellen Zahlen, was nicht definiert ist. Daher gilt die Identität nicht.

(Selbst wenn man fälschlicherweise $\times$ als Multiplikation reeller Zahlen interpretieren würde, ist die Gleichung nicht korrekt. Beispielsweise für $\vec{a} := \vec{e}_1, \vec{b} := \vec{e}_2, \vec{c} := \vec{e}_3$ gilt $\vec{b} \times \vec{c} = \vec{a}$, so dass $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 1$ ist. Andererseits ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$. Folglich ist die Identität auch in diesem Fall nicht erfüllt.)