Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2010
29.04.2010

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie (gegebenenfalls in Abhängigkeit von den vorkommenden Parametern) die Zeilennormalform und den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Geben Sie außerdem jeweils eine Basis von Kern(A), Bild(A), Kern(B) und Bild(B) an.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ von:

a)

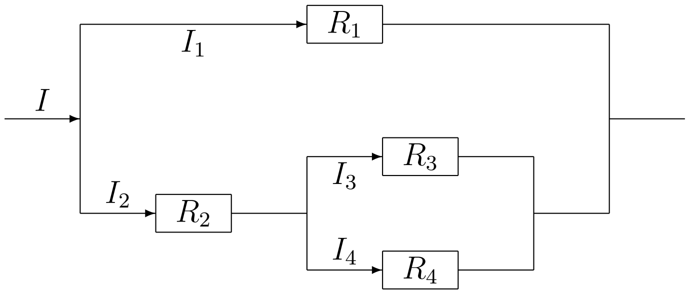
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 4\,x_1 & - & 8\,x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ -2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & + & 4\,x_5 & = & -3 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 3\,x_4 & + & 4\,x_5 & = & -1 \end{array}$$

Aufgabe 3

Gegeben ist die folgende Gleichstromschaltung:



Es gelte $I = 1\,[A]$ und $R_1 = R_2 = R_3 = \alpha\,[\Omega]$ sowie $R_4 = \beta\,[\Omega]$.

a) Stellen Sie mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze ein lineares Gleichungssystem für die Ströme I_1 bis I_4 auf.

— bitte wenden —

b) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von α und β die Lösbarkeit des in **a)** erhaltenen linearen Gleichungssystems.

Bestätigen Sie dabei, dass das System für physikalisch sinnvolle Werte von α und β (nämlich $\alpha, \beta > 0$) stets eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 4

In einem reellen Vektorraum V seien linear unabhängige Vektoren a_1, a_2, a_3 gegeben. Die Vektoren b_1, b_2, b_3 werden definiert durch

$$b_1 := (\alpha - 1)a_2 + 2a_3, \quad b_2 := 2a_1 + (2\alpha - 3)a_2 + 4a_3, \quad b_3 := a_1 + (\alpha - 1)a_2 + a_3.$$

a) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren b_1, b_2, b_3 linear unabhängig?

b) Nun sei $\alpha = 0$. Für welche β lässt sich der Vektor $x := a_1 + \beta a_2 + 2a_3$ mittels der Vektoren b_1, b_2 und b_3 darstellen? Geben Sie diese Darstellung an.

Aufgabe 5

Im $\mathbb{R}^{(4,4)}$ bzw. $\mathbb{R}^{(3,3)}$ sind die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie, dass A und B regulär sind. Ist C regulär? Bestimmen Sie A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$, $(A^T)^{-1}$ sowie $((AB)^T)^{-1}$.

b) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $(AB)\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 6

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,m)}$ soll durch Zeilenoperationen umgeformt werden. Bestimmen Sie für jede mögliche Zeilenumformung eine Matrix B so, dass BA die Matrix ist, welche sich nach Ausführen der Zeilenumformung ergibt.

Aufgabe 7

Gegeben seien die Permutationen $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ und $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Berechnen Sie $\sigma \circ \pi$ und $\pi \circ \sigma$.

b) Bestimmen Sie $(\sigma \circ \pi)^{-1}$ und bestätigen Sie, dass $(\sigma \circ \pi)^{-1} = \pi^{-1} \circ \sigma^{-1}$ gilt.

c) Geben Sie σ als Hintereinanderausführung von Transpositionen an und bestimmen Sie das Vorzeichen $\mathrm{sign}(\sigma)$ von σ.