Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2010

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 3. Übungsblatt

Aufgabe 1

Mittels Zeilenumformungen bringen wir A auf Zeilennormalform; die Zeilen werden dabei jeweils mit Z_1, Z_2 und Z_3 bezeichnet:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{tauschen}]{\text{Zeilen}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2}Z_2]{Z_1 \to -\frac{1}{2}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - 4Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -6 & 6 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 6Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to -\frac{1}{3}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + 2Z_3]{Z_1 \to Z_1 + \frac{7}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

In der Zeilennormalform von A gibt es drei nichtverschwindende Zeilen, also hat A Rang 3. Daher ist $\dim \operatorname{Bild}(A) = 3$, so dass $\operatorname{Bild}(A) = \mathbb{C}^3$ folgt. Eine Basis von $\operatorname{Bild}(A) = \mathbb{C}^3$ ist etwa gegeben durch $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Der Zeilennormalform von A lesen wir ab $\operatorname{Kern}(A) = \operatorname{Lin}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, also ist $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\operatorname{Kern}(A)$.

Nun zur Matrix B:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_3 \to \frac{1}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[(j=2,3,4)]{Z_j \to Z_j - Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha - 2 & \beta - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_2 \to -\frac{1}{2}Z_2]{Z_3 \to Z_3 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & \alpha - 2 & \beta - 2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_3 \to \frac{1}{2}Z_3]{Z_4 \to Z_4 + Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 10 & \beta - 4 \end{pmatrix} =: \widetilde{B}$$

Fall 1: $\alpha = 10$ und $\beta = 4$. In diesem Fall steht die Zeilennormalform von B bereits da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Da hier genau 3 nichtverschwindende Zeilen existieren, hat B in diesem Fall Rang 3. Wegen $\dim \mathrm{Bild}(B) = \mathrm{rang}(B) = 3$ müssen wir zur Angabe einer Basis von $\mathrm{Bild}(B)$ drei linear unabhängige Vektoren aus $\mathrm{Bild}(B)$ finden. Der Zeilennormalform von B können wir entnehmen, dass der erste, zweite und dritte Spaltenvektor von B, d.h. $B\vec{e}_1, B\vec{e}_2, B\vec{e}_3 \in \mathrm{Bild}(B)$, linear unabhängig sind. Somit ist eine Basis von $\mathrm{Bild}(B)$ gegeben durch

$$\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-2\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\\-1\end{pmatrix}\right).$$

(Die Basis von $\mathrm{Bild}(B)$ ist keineswegs eindeutig bestimmt, wir könnten beispielsweise auch die drei linear unabhängigen Vektoren $B\vec{e}_1, B\vec{e}_2, B\vec{e}_5$ als Basis von $\mathrm{Bild}(B)$ nehmen.)

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir der Zeilennormalform von B ab, dass $\left(\begin{pmatrix}6\\-1\\-4\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\-1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(B)$ ist.

Fall 2: $\alpha = 10$ und $\beta \neq 4$. Dann erhalten wir

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\beta-4)^{-1} Z_4} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 6 & 3\\0 & 1 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -4 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 3Z_4} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 6 & 0\\0 & 1 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -4 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

und lesen ab: In diesem Fall hat B Rang 4. Wegen $\dim \mathrm{Bild}(B) = 4$ gilt $\mathrm{Bild}(B) = \mathbb{C}^4$, so dass eine Basis von $\mathrm{Bild}(B)$ etwa durch $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ gegeben ist. Der Zeilennormalform von B entnehmen wir $\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}6\\-1\\-4\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$, also ist $\left(\begin{pmatrix}6\\-1\\-4\\-1\\0\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(B)$.

Fall 3: $\alpha \neq 10$. Dann setzen wir $\delta := (\beta - 4)/(\alpha - 10)$ und erhalten

$$\widetilde{B} \xrightarrow{Z_4 \to (\alpha-10)^{-1} Z_4} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 6 & 3\\0 & 1 & 0 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & -4 & -1\\0 & 0 & 0 & 1 & \delta\end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 4Z_4]{Z_1 \to Z_1 - 6Z_4,\ Z_2 \to Z_2 + Z_4} \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 3-6\delta\\0 & 1 & 0 & 0 & \delta\\0 & 0 & 1 & 0 & -1+4\delta\\0 & 0 & 0 & 1 & \delta\end{pmatrix}.$$

Die Matrix B besitzt somit auch in diesem Fall Rang 4. Wegen $\dim \mathrm{Bild}(B) = 4$ gilt $\mathrm{Bild}(B) = \mathbb{C}^4$, so dass eine Basis von $\mathrm{Bild}(B)$ etwa durch $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ gegeben ist. Der Zeilennormalform von B lesen wir ab $\mathrm{Kern}(B) = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}3-6\delta\\\delta\\-1+4\delta\\\delta\\-1\end{pmatrix}\right)$, also ist $\left(\begin{pmatrix}3-6\delta\\\delta\\-1+4\delta\\\delta\\-1\end{pmatrix}\right)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(B)$.

Aufgabe 2

a) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3\\ x_3 + 4x_4 &= 1\\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

liegt bereits in Zeilennormalform vor:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

(Stellen wir uns hier das Endergebnis beim Lösungsalgorithmus vor, so wären hier womöglich noch Nullzeilen). Nun verwenden wir den (-1)-Ergänzungstrick (Dafür muss die Zeilennormalform vorliegen!). In jeder Spalte der Koeffizientenmatrix sollte eine neue Stufe anfangen. Dies erzwingen wir, indem wir zwei Zeilen der Form $0 \ldots 0 \; -1 \; 0 \ldots 0$ einfügen:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Jetzt können wir die Lösung ablesen: die beiden *Spalten* mit den neu hinzugekommenen Stufen (an den -1-en erkennbar) sind eine Basis des homogenen Lösungsraums und die letzte *Spalte* ist eine spezielle Lösung des inhomogenen Gleichungssystems. Für die allgemeine Lösung des inhomogenen Gleichungssystems ergibt sich

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Das Einfügen jener -1-Zeilen ist nichts anderes als das Setzen von freien Parametern. Betrachten wir das ursprüngliche Gleichungssystem mit Variablen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2\,, \end{aligned}$$

setzen zwei Parameter (aber mit Minuszeichen)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2\,, \end{aligned}$$

lassen in jeder Zeile nur eine Variable stehen

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 + \lambda + 2\mu \\ x_2 &= -\lambda \\ x_3 &= 1 + 4\mu \\ x_4 &= -\mu \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

und schreiben vektoriell

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

b) Um das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 2\,x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 = & 0 \\ 4\,x_1 & - & 8\,x_2 & + & 3\,x_3 & - & 3\,x_4 & + & x_5 = & 2 \\ -2\,x_1 & + & 4\,x_2 & - & 2\,x_3 & - & x_4 & + & 4\,x_5 = & -3 \\ x_1 & - & 2\,x_2 & & & - & 3\,x_4 & + & 4\,x_5 = & -1 \end{array}$$

zu lösen, bestimmen wir die Zeilennormalform der zugehörigen erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & -8 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -2 & -1 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 4 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_1]{\substack{Z_2 \to Z_2 - 4Z_1 \\ Z_3 \to Z_3 + 2Z_1}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - Z_2]{\substack{Z_2 \to -Z_2 \\ Z_3 \to -\frac{1}{3} Z_3}} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 6 & -3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 3Z_3} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_3]{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

und verwenden den (-1)-Ergänzungstrick, d.h. wir lassen Nullzeilen in der Zeilennormalform weg und ergänzen Zeilen mit -1 und sonst Nullen, so dass auf der Diagonalen nur ± 1 steht:

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Nun können wir die allgemeine Lösung $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ des Gleichungssystems ablesen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Aufgabe 3

a) Wir verwenden die Kirchhoffschen Gesetze, um das Gleichungssystem aufzustellen: Die Knotenregel liefert die Gleichungen

$$I = I_1 + I_2 \qquad \text{und} \qquad I_2 = I_3 + I_4\,.$$

Die Maschenregel liefert zwei weitere Gleichungen, nämlich

$$R_3 I_3 = R_4 I_4 \qquad \text{und} \qquad R_1 I_1 = R_2 I_2 + R_3 I_3\,.$$

(Die Maschenregel liefert auch noch $R_1 I_1 = R_2 I_2 + R_4 I_4$, aber diese Information ist in den beiden anderen Gleichungen bereits enthalten.) Insgesamt ergibt sich mit den gegebenen Werten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 &= 1 \\ I_2 - I_3 - I_4 &= 0 \\ \alpha I_3 - \beta I_4 &= 0 \\ \alpha I_1 - \alpha I_2 - \alpha I_3 &= 0 \end{aligned}$$

b) Wir betrachten nun die zugehörige erweiterte Matrix:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ \alpha & -\alpha & -\alpha & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 - \alpha Z_1]{Z_1 \to Z_1 - Z_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & -2\alpha & -\alpha & 0 & -\alpha \end{array}\right) \xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 2\alpha Z_2}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & -3\alpha & -2\alpha & -\alpha \end{array}\right) \xrightarrow{Z_4 \to Z_4 + 3Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha - 3\beta & -\alpha \end{array}\right) =: B$$

Fall 1: Für $\delta := 2\alpha + 3\beta \neq 0$ erhalten wir

$$\xrightarrow{Z_4 \to -Z_4/\delta} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & -\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{Z_2 \to Z_2 + Z_4 \\ Z_3 \to Z_3 + \beta Z_4}]{Z_1 \to Z_1 - Z_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 - \alpha/\delta \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \alpha/\delta \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & \alpha\beta/\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{array}\right) =: B_1$$

Fall 1.1: Ist zusätzlich $\alpha \neq 0$, so geht es weiter wie folgt:

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3/\alpha} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 - \alpha/\delta \\ 0 & 1 & -1 & 0 & \alpha/\delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta/\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_3]{Z_1 \to Z_1 - Z_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 - (\alpha+\beta)/\delta \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (\alpha+\beta)/\delta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \beta/\delta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha/\delta \end{array}\right).$$

Das Gleichungssystem ist folglich eindeutig lösbar; man hat

$$I_1 = 1 - \frac{\alpha+\beta}{\delta} = \frac{\alpha + 2\beta}{2\alpha + 3\beta}, \quad I_2 = \frac{\alpha+\beta}{2\alpha+3\beta}, \quad I_3 = \frac{\beta}{2\alpha+3\beta}, \quad I_4 = \frac{\alpha}{2\alpha+3\beta}.$$

Fall 1.2: Ist dagegen $\alpha = 0$, so haben wir

$$B_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Sämtliche Lösungen dieses inhomogenen Systems erhalten wir, indem wir $I_3 = \lambda$ wählen. Dann ergibt sich $I_1 = 1 - \lambda$, $I_2 = \lambda$ und $I_4 = 0$. Die allgemeine Lösung lautet folglich

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\lambda \\ \lambda \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

Fall 2: Gilt $2\alpha + 3\beta = 0$, also $\beta = -\frac{2}{3}\alpha$, so ist

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \frac{2}{3}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\alpha \end{array}\right).$$

Fall 2.1: Für $\alpha \neq 0$ folgt wegen der letzten Zeile: Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.

Fall 2.2: Ist dagegen $\alpha = 0$, so haben wir

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Wir können $I_3 = \lambda$ und $I_4 = \mu$ beliebig wählen; dann folgt $I_1 = 1 - \lambda - \mu$ und $I_2 = \lambda + \mu$. Die allgemeine Lösung ist daher in diesem Fall

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\lambda, \mu \in \mathbb{C}).$$

(Alternativ hätte auch der (-1)-Ergänzungstrick auf dieses Ergebnis geführt.)

Aus physikalischer Sicht sind nur Werte $\alpha, \beta > 0$ sinnvoll. Dann haben wir stets Fall 1.1 und damit eindeutige Lösbarkeit.

Aufgabe 4

a) Wir untersuchen, für welche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ man $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$ erhält. Es gilt

$$\begin{aligned} &\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 \\ &\qquad = \lambda_1\big((\alpha-1)a_2 + 2a_3\big) + \lambda_2\big(2a_1 + (2\alpha-3)a_2 + 4a_3\big) + \lambda_3\big(a_1 + (\alpha-1)a_2 + a_3\big) \\ &\qquad = \big(2\lambda_2 + \lambda_3\big)a_1 + \big((\alpha-1)\lambda_1 + (2\alpha-3)\lambda_2 + (\alpha-1)\lambda_3\big)a_2 + \big(2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3\big)a_3\,. \end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von a_1, a_2, a_3 wird dies genau dann $= 0$, wenn die Koeffizienten der a_1, a_2, a_3 verschwinden. Folglich gilt $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = 0$ genau dann, wenn λ_1, λ_2 und λ_3 das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ (\alpha-1)\lambda_1 + (2\alpha-3)\lambda_2 + (\alpha-1)\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

lösen. Die Matrix dieses homogenen linearen Gleichungssystems formen wir um:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ \alpha-1 & 2\alpha-3 & \alpha-1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Zeilen tauschen}]{Z_3 \to \frac{1}{2}Z_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 1 \\ \alpha-1 & 2\alpha-3 & \alpha-1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - Z_2,\ Z_2 \to \frac{1}{2}Z_2]{Z_3 \to Z_3 - (\alpha-1)Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{2}(\alpha-1) \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\alpha \end{pmatrix}$$

Man sieht: Die Matrix hat Rang 3 genau dann, wenn $\alpha \neq 0$ ist. Obiges Gleichungssystem besitzt also genau im Fall $\alpha \neq 0$ nur die triviale Lösung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Folglich sind die Vektoren b_1, b_2, b_3 genau dann linear unabhängig, wenn $\alpha \neq 0$ ist.

b) Sei $x := a_1 + \beta a_2 + 2a_3$. Wir suchen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 = x$. Wegen

$$\begin{aligned} \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 &= \lambda_1(-a_2 + 2a_3) + \lambda_2(2a_1 - 3a_2 + 4a_3) + \lambda_3(a_1 - a_2 + a_3) \\ &= (2\lambda_2 + \lambda_3)a_1 + (-\lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3)a_2 + (2\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3)a_3 \end{aligned}$$

und der linearen Unabhängigkeit von a_1, a_2, a_3 läuft dies darauf hinaus, eine Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \\ 2 \end{pmatrix}$$

zu bestimmen. Wir formen die erweiterte Matrix dieses Gleichungssystems um:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & \beta \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_2]{Z_3 \to Z_3 + 2Z_2,\ Z_2 \to -Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -\beta \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 2+2\beta \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to \frac{1}{2} Z_2]{Z_3 \to Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & -\beta \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3+2\beta \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - 3Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\beta - \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3+2\beta \end{array}\right)$$

Somit ist das System nur für $3 + 2\beta = 0$, d.h. $\beta = -\frac{3}{2}$ lösbar. Die Zeilennormalform lautet

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Das Gleichungssystem hat also keine eindeutige Lösung; die allgemeine Lösung lautet

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (\eta \in \mathbb{R} \text{ und } \mu = -\tfrac{1}{2}\eta)\,.$$

Fazit: Die Darstellung des Vektors x gelingt genau dann, wenn $\beta = -\frac{3}{2}$ ist. Es gilt dann

$$x = \mu b_1 + (\tfrac{1}{2} - \mu) b_2 + 2\mu b_3 \qquad (\mu \in \mathbb{R})\,.$$

Aufgabe 5

a) Mit Zeilenumformungen erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 + 5Z_2} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -14 & 5 & -5 & 0 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to Z_2 + Z_1]{Z_3 \to Z_3 + 5Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - 3Z_3]{Z_4 \to Z_4 - 6Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -1 & 1 & -14 & -15 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & -30 & -30 & -6 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_4 \to Z_4 + 2Z_1]{Z_1 \to -Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & -1 & 14 & 15 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 + Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\text{permutieren}]{\text{Zeilen}} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 12 & 15 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Wir sehen, dass A regulär ist, und haben zugleich $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ berechnet.

Für die Matrix B ergibt sich

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \to Z_1 - Z_2]{Z_4 \to Z_4 - 3Z_3} \left(\begin{array}{cccc|cccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 \to -Z_1} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - Z_4} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist B regulär mit $B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Wegen

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 2Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 4Z_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

hat die Matrix C den Rang 2, so dass C nicht regulär ist.

Da A und B regulär sind, gilt:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = \begin{pmatrix} 42 & 49 & 10 & 2 \\ 5 & 5 & 1 & 0 \\ 12 & 15 & 3 & 1 \\ -38 & -45 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 12 & -2 \\ 1 & 5 & 15 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$((AB)^T)^{-1} = ((AB)^{-1})^T = \begin{pmatrix} 42 & 5 & 12 & -38 \\ 49 & 5 & 15 & -45 \\ 10 & 1 & 3 & -9 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Hier verwendeten wir das folgende Resultat: Ist $D \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ oder $D \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ regulär, so ist auch D^T regulär und es gilt $(D^T)^{-1} = (D^{-1})^T$.

In der Tat ergibt sich mit den Rechenregeln für das Transponieren von Matrizen

$$(D^{-1})^T D^T = (DD^{-1})^T = E_n^T = E_n \qquad \text{und} \qquad D^T (D^{-1})^T = (D^{-1}D)^T = E_n^T = E_n\,.$$

b) Da A und AB regulär sind, bekommen wir die eindeutig bestimmten Lösungen

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \vec{x} = (AB)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6

Sei $A \in \mathbb{C}^{(n,m)}$. Die Matrix $B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ werden wir jeweils definieren, indem wir ihre Zeilen, die wir mit $\vec{x}_1^T, \ldots, \vec{x}_n^T$ bezeichnen, angeben.
Im folgenden brauchen wir ständig: Für eine Matrix $D \in \mathbb{C}^{(n,m)}$ ist $\vec{e}_j^{\,T} D$ die j-te Zeile von D, wobei $\vec{e}_j$ der j-te Einheitsvektor von $\mathbb{C}^n$ ist.

(Z1): Vertauschen von Zeile j und k für $j \neq k$. Dabei soll $\vec{x}_j^{\,T} A = \vec{e}_j^{\,T} BA = \vec{e}_k^{\,T} A$ und $\vec{x}_k^{\,T} A = \vec{e}_k^{\,T} BA = \vec{e}_j^{\,T} A$ sowie $\vec{x}_l^{\,T} A = \vec{e}_l^{\,T} BA = \vec{e}_l^{\,T} A$ für $l \neq j, k$ gelten. Daher wählen wir $\vec{x}_j^{\,T} = \vec{e}_k^{\,T}$ und $\vec{x}_k^{\,T} = \vec{e}_j^{\,T}$ sowie $\vec{x}_l^{\,T} = \vec{e}_l^{\,T}$ für $l \neq j, k$.

(Z2): Multiplizieren von Zeile j mit $\alpha \neq 0$. Es soll also gelten: $\vec{e}_j^{\,T} BA = \alpha(\vec{e}_j^{\,T} A)$ und $\vec{e}_k^{\,T} BA = \vec{e}_k^{\,T} A$ für $k \neq j$, d. h. $\vec{x}_j^{\,T} A = \alpha(\vec{e}_j^{\,T} A)$ und $\vec{x}_k^{\,T} A = \vec{e}_k^{\,T} A$ für $k \neq j$. Dies ist offenbar für $\vec{x}_j^{\,T} = \alpha \vec{e}_j^{\,T}$ und $\vec{x}_k^{\,T} = \vec{e}_k^{\,T}$ für $k \neq j$ erfüllt.

(Z3): Addieren des β-fachen von Zeile k zu Zeile j, wobei $\beta \in \mathbb{C}$ und $k \neq j$ sind. Hier soll $\vec{x}_j^{\,T} A = \vec{e}_j^{\,T} BA = \vec{e}_j^{\,T} A + \beta(\vec{e}_k^{\,T} A) = (\vec{e}_j^{\,T} + \beta \vec{e}_k^{\,T}) A$ und $\vec{x}_l^{\,T} A = \vec{e}_l^{\,T} BA = \vec{e}_l^{\,T} A$ für $l \neq j$ gelten. Dies erreichen wir mit $\vec{x}_j^{\,T} = \vec{e}_j^{\,T} + \beta \vec{e}_k^{\,T}$ und $\vec{x}_l^{\,T} = \vec{e}_l^{\,T}$ für $l \neq j$.

Aufgabe 7

a) Wegen

$$\begin{aligned} \sigma \circ \pi(1) &= \sigma(\pi(1)) = \sigma(4) = 1, & \sigma \circ \pi(2) &= \sigma(\pi(2)) = \sigma(3) = 4, \\ \sigma \circ \pi(3) &= \sigma(\pi(3)) = \sigma(2) = 2, & \sigma \circ \pi(4) &= \sigma(\pi(4)) = \sigma(1) = 3 \end{aligned}$$

ist

$$\sigma \circ \pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ähnlich sehen wir

$$\pi \circ \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

b) Um $(\sigma \circ \pi)^{-1}$ zu bestimmen, vertauschen wir die obere Zeile von $\sigma \circ \pi$ mit der unteren Zeile und sortieren anschließend die Spalten so, dass die obere Zeile wieder korrekt dasteht:

$$(\sigma \circ \pi)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und

$$\pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

woraus

$$\pi^{-1} \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

folgt.

c) Eine Permutation von $\{1, \ldots, n\}$, welche zwei Elemente j, k mit $1 \leqslant j < k \leqslant n$ vertauscht und die restlichen festlässt, heißt Transposition. Diese bezeichnen wir mit τ_{jk}, also

$$\tau_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & j-1 & j & j+1 & \ldots & k-1 & k & k+1 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & j-1 & k & j+1 & \ldots & k-1 & j & k+1 & \ldots & n \end{pmatrix}.$$

Um σ als Hintereinanderausführung von Transpositionen zu schreiben, gehen wir schrittweise vor: Zunächst sorgen wir durch Vertauschen von 1 und 3 dafür, dass die 1 korrekt abgebildet wird. Dabei wird aber die 3 falsch positioniert (3 würde jetzt mit der 1 vertauscht werden, 3 soll aber auf 4 gehen), also stellt man im nächsten Schritt die 3 durch Vertauschen von 1 mit 4 richtig. Schließlich hat man soeben 4 mit 1 getauscht. Da auch die 2 korrekt abgebildet wird, ist man fertig und erhält als Endergebnis $\sigma = \tau_{14} \circ \tau_{13}$.

Diese Darstellung ist nicht eindeutig, z.B. gilt auch $\sigma = \tau_{14} \circ \tau_{13} \circ \tau_{13} \circ \tau_{13}$ oder $\sigma = \tau_{34} \circ \tau_{14}$.

Da σ als Hintereinanderausführung einer geraden Anzahl von Transpositionen geschrieben werden kann, ist $\operatorname{sign}(\sigma) = 1$. Dies lässt sich auch mit Hilfe der folgenden Darstellung des Vorzeichens einsehen:

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Die Paare (i, j) mit $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $i < j$ lauten

$$(1,2), \quad (1,3), \quad (1,4), \quad (2,3), \quad (2,4), \quad (3,4).$$

Daher ergibt sich für obiges Produkt

$$\begin{aligned}
\operatorname{sign}(\sigma) &= \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} \\
&= \frac{\sigma(2) - \sigma(1)}{2 - 1} \frac{\sigma(3) - \sigma(1)}{3 - 1} \frac{\sigma(4) - \sigma(1)}{4 - 1} \frac{\sigma(3) - \sigma(2)}{3 - 2} \frac{\sigma(4) - \sigma(2)}{4 - 2} \frac{\sigma(4) - \sigma(3)}{4 - 3} \\
&= \frac{2 - 3}{1} \frac{4 - 3}{2} \frac{1 - 3}{3} \frac{4 - 2}{1} \frac{1 - 2}{2} \frac{1 - 4}{1} = 1.
\end{aligned}$$