Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2010
06.05.2010

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie die Determinanten folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist C regulär?

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte? Welche Matrix ist diagonalisierbar? Ermitteln Sie, falls möglich, reguläre Matrizen S_A bzw. S_B so, dass $S_A^{-1} A S_A$ bzw. $S_B^{-1} B S_B$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Begründen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und geben Sie eine reguläre Matrix S so an, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Ist es möglich, die Matrix S orthogonal zu wählen?

Aufgabe 4

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Untersuchen Sie A auf Diagonalisierbarkeit. Geben Sie, falls möglich, eine orthogonale Matrix S und ihre Inverse S^{-1} so an, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

b) Ermitteln Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, die das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = 2\vec{x}$ lösen.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Bestimmen Sie alle Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist.

Aufgabe 6

Gegeben sei das System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u' &= 8u - 6v, \\ v' &= 9u - 7v. \end{aligned}$$

Stellen Sie dieses mit Hilfe einer geeigneten Matrix $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ in der Form

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{1}$$

dar. Begründen Sie, dass A ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, und definieren Sie Funktionen $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$ so, dass (1) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u}' \\ \widetilde{v}' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix}$$

ist. Da D Diagonalgestalt besitzt, erhält man zwei entkoppelte Gleichungen, aus denen sich $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$ berechnen lassen. Bestimmen Sie damit die Lösungen des Systems (1).

Definition: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ mit $A^*A = E_n$ heißt *unitär*.

Aufgabe 7

a) Begründen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n.n)}$ genau dann unitär ist, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$ bilden.

b) Ergänzen Sie einen dritten Vektor so, dass die Vektoren die Spalten einer unitären Matrix bilden:

$$\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix}.$$

c) Sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ eine unitäre Matrix. Zeigen Sie:

- **i)** $\langle A\vec{z}, A\vec{z} \rangle = \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle$ für alle $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$.
- **ii)** Alle Eigenwerte von A haben den Betrag 1.