Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2010
12.05.2010

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Gegeben sei die reelle, symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die folgende Äquivalenz besteht:

$$A \text{ ist positiv definit} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1 > 0\,, \quad \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} > 0\,, \quad \det(A) > 0\,.$$

Geben Sie ein entsprechendes Kriterium für „negativ definit“ an.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, gegebenenfalls in Abhängigkeit von auftretenden Konstanten, ob die folgenden Matrizen positiv definit sind.

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = (b_{kl})_{k,l=1,\dots,n}\,, \quad \text{wobei } b_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 2, & |k-l| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(0,0) := 1$ und

$$f(x,y) := \frac{x^2+y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

für $(x,y) \neq (0,0)$ gegeben. Begründen Sie, dass dann die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big)$$

existieren und mit $f(0,0)$ übereinstimmen, obwohl f in $(0,0)$ unstetig ist.

b) Untersuchen Sie jeweils, ob $f(x,y)$ für $(x,y) \to (0,0)$ konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

i) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

ii) $f(x,y) = \dfrac{xy}{e^{x^2}-1}$

Aufgabe 4

Skizzieren Sie die folgenden Kurven und berechnen Sie deren Längen.

a) $\vec{r}\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \vec{r}(t) := \big(t - \sin t,\ 1 - \cos t\big)$

b) $z\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto z(\varphi) := \varphi e^{i\varphi}$

Hinweis zur Bestimmung von $\int \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt$: **a)** Schreiben Sie $\cos t = \cos(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t)$ und verwenden Sie das Additionstheorem für Cosinus. **b)** Es gilt $\int\sqrt{1+\varphi^2}\, d\varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{Arsinh}\varphi + \varphi\sqrt{1+\varphi^2})$.

Aufgabe 5

Die Kurve $\vec{r}\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{Arcsin} t \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

a) Sei $t_0 \in (-1, 1)$. Geben Sie eine Parameterdarstellung der Tangente in $\vec{r}(t_0)$ an.

b) Berechnen Sie die Länge der Kurve $\vec{r}$ und bestimmen Sie die Darstellung von $\vec{r}$ bezüglich der Bogenlänge.

Aufgabe 6

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen die partiellen Ableitungen.

a) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x^3 - 2x^2y^2 + 4xy^3 + y^4 + 10$

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto (x^2 + y^2)e^{xy}$

c) $f\colon \mathbb{R}^2 \times (0, \infty) \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto xe^y/z$

Berechnen Sie auch die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung. Ermitteln Sie zusätzlich in **b)** die Richtungsableitung $D_{\vec{v}}f$ von f in Richtung $\vec{v} := (1, 1)$.

Aufgabe 7

Betrachten Sie die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, die folgendermaßen definiert wird:

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2y}{x^2 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Berechnen Sie in jedem Punkt die partiellen Ableitungen von f.

c) Sind die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0, 0)$ stetig?