Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2010
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die reelle Matrix A ist symmetrisch. Es gibt daher ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. (Es müssen nicht unbedingt drei verschiedene Eigenwerte sein.) Wir wissen, dass $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ gilt.
Wir halten außerdem noch folgendes fest: Ist A positiv definit, so gilt dies auch für $A_1 := \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{smallmatrix}\right)$, denn für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ ist dann

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} > 0\,.$$

Zum Beweis der Äquivalenz: Mit A ist auch A_1 positiv definit, und aus der Vorlesung wissen wir, dass dies äquivalent ist zu $a_1 > 0$ und $\det(A_1) > 0$ (vgl. Satz 2 in Kapitel 25). Da A positiv definit ist, müssen alle Eigenwerte > 0 sein, d. h. es gilt auch $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$.
Ist umgekehrt die rechte Seite der zu beweisenden Äquivalenz erfüllt, so folgt, dass A_1 positiv definit ist und zudem $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$ gilt. Angenommen, A sei nicht positiv definit. Dann muss mindestens ein Eigenwert $\leqslant 0$ sein. Wegen $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$ bedeutet das aber: Zwei der Eigenwerte müssen < 0 sein; o.B.d.A. seien dies λ_1 und λ_2. Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ gilt dann (weil $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ ein Orthonormalsystem ist)

$$\begin{aligned}(\alpha\vec{c}_1 + \beta\vec{c}_2)^T A(\alpha\vec{c}_1 + \beta\vec{c}_2) &= (\alpha\vec{c}_1 + \beta\vec{c}_2)^T(\alpha\lambda_1\vec{c}_1 + \beta\lambda_2\vec{c}_2) \\ &= \alpha^2\lambda_1\vec{c}_1^{\,T}\vec{c}_1 + \alpha\beta\lambda_2\vec{c}_1^{\,T}\vec{c}_2 + \alpha\beta\lambda_1\vec{c}_2^{\,T}\vec{c}_1 + \beta^2\lambda_2\vec{c}_2^{\,T}\vec{c}_2 = \alpha^2\lambda_1 + \beta^2\lambda_2 < 0\,.\end{aligned}$$

Jetzt wählen wir $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ derart, dass der Vektor $\vec{x} := \alpha\vec{c}_1 + \beta\vec{c}_2$ als dritte Komponente 0 hat. Es gilt also $\vec{x} = (\mu, \nu, 0)$ mit gewissen $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, und für $\vec{x}_1 := (\mu, \nu)$ ergibt sich $\vec{x}_1^{\,T} A_1 \vec{x}_1 = \vec{x}^{\,T} A \vec{x} < 0$, im Widerspruch zur positiven Definitheit von A_1. Damit ist die Äquivalenz gezeigt.

Als Kriterium für negative Definitheit erhalten wir:

$$\begin{aligned}&A \text{ ist negativ definit } \iff -A \text{ ist positiv definit } \iff \\ &\quad -a_1 > 0,\ \det(-A_1) > 0,\ \det(-A) > 0 \iff a_1 < 0,\ \det(A_1) > 0,\ \det(A) < 0\end{aligned}$$

Das Vorzeichen der Determinanten muss also, mit $-$ beginnend, abwechseln.

Bemerkung: Die entsprechenden Aussagen kann man auch für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ zeigen: Eine symmetrische Matrix $A = (a_{jk})_{jk} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist positiv definit genau dann, wenn alle *Hauptunterdeterminanten von* A positiv sind, d.h. wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} > 0$$

für alle $m = 1, 2, \dots, n$ gilt.

Aufgabe 2

Für die symmetrische Matrix A_β verwenden wir das Kriterium aus Aufgabe 1. Es gilt

$$1 > 0 \qquad \text{und} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0\,;$$

die ersten beiden Hauptunterdeterminanten sind also positiv. Die Matrix A_β ist somit genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante > 0 ausfällt. Wegen

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 + 2Z_1]} \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } S_1]} \det\begin{pmatrix} 4 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = 4 - \beta^2$$

ergibt sich: A_β ist positiv definit $\iff 0 < 4 - \beta^2 \iff |\beta| < 2 \iff -2 < \beta < 2$.

Nun zur Matrix B: Für $n = 1$ ist $B = (1)$ positiv definit. Im Fall $n \geqslant 2$ ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & 1 & 2 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n,n)}.$$

Für $\vec{x} := \vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$B\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad \vec{x}^T B\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0,$$

während sich für $\vec{y} := \vec{e}_1 - \vec{e}_2 = (1, -1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$B\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad \vec{y}^T B\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

ergibt. Somit ist die Matrix B indefinit.

Aufgabe 3

a) Will man den ersten der beiden angegebenen Grenzwerte, also

$$\lim_{x \to 0} h(x) \qquad \text{mit} \quad h(x) := \lim_{y \to 0} f(x, y)\,,$$

bestimmen, so muss man $h(x)$ nur für $x \neq 0$ betrachten. Für jedes $x \neq 0$ gilt

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} \xrightarrow{y \to 0} \frac{x^2 + 0}{0 + (x - 0)^2} = 1\,,$$

d. h. man hat $h(x) = 1$ für alle $x \neq 0$. Also ergibt sich

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{x\to 0} h(x) = 1 = f(0,0)\,,$$

und wegen $f(x,y) = f(y,x)$ erhält man dann auch

$$\lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(y,x)\Big) = \lim_{y\to 0} h(y) = 1 = f(0,0)\,.$$

Trotzdem ist die Funktion f im Punkt $(0,0)$ unstetig, denn es gilt $(\frac{1}{k},\frac{1}{k}) \xrightarrow{k\to\infty} (0,0)$ und

$$f(\tfrac{1}{k},\tfrac{1}{k}) = \frac{1/k^2 + 1/k^2}{1/k^4 + 0} = 2k^2 \xrightarrow{k\to\infty} \infty\,.$$

b) **i)** Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2+1)-1} \\ &= \sqrt{x^2+y^2+1}+1 \end{aligned}$$

und damit ergibt sich unmittelbar

$$f(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{0^2+0^2+1}+1 = 2\,.$$

ii) Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x,0) = 0 \xrightarrow{x\to 0} 0 \qquad \text{und} \qquad f(x,x) = \frac{x^2}{e^{x^2}-1} \xrightarrow{x\to 0} \lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1} = 1\,,$$

d.h. bei unterschiedlicher Annäherung an den Nullpunkt erhält man verschiedene Werte. Folglich existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht.

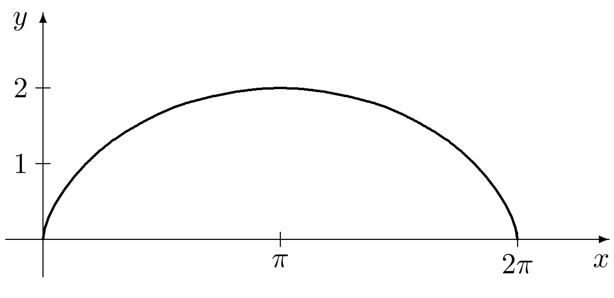
Aufgabe 4

a) Es gilt $\vec{r}\,'(t) = (1-\cos t, \sin t)$ und damit

$$\begin{aligned} \|\vec{r}\,'(t)\|^2 &= (1-\cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t = 2 - 2\cos t \\ &= 2\big(1-\cos(\tfrac12 t + \tfrac12 t)\big) = 2\big(1-\cos^2(\tfrac12 t) + \sin^2(\tfrac12 t)\big) = 4\sin^2(\tfrac12 t)\,. \end{aligned}$$

Definitionsgemäß ist also

$$L(\vec{r}) = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} 2|\sin(\tfrac12 t)|\,dt = 2\int_0^{2\pi} \sin(\tfrac12 t)\,dt = -4\cos(\tfrac12 t)\Big|_{t=0}^{2\pi} = 8\,.$$



Bemerkung: Diese Kurve heißt Zykloide. Sie ist die Bahn, die ein Kreispunkt beim Abrollen eines Kreises auf einer Geraden beschreibt.

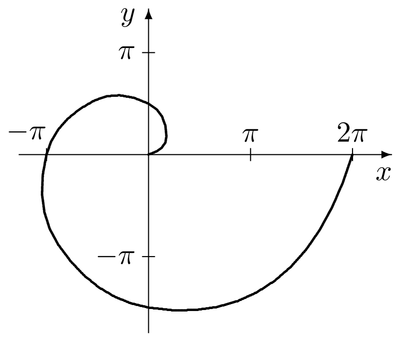
b) Hier befinden wir uns in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, welche wir als $\mathbb{R}^2$ auffassen. Wegen $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ist die Kurve $\vec{r}(\varphi) = (\varphi\cos\varphi, \varphi\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, in $\mathbb{R}^2$ gemeint.

Mit $\vec{r}\,'(\varphi) = (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi, \sin\varphi + \varphi\cos\varphi)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\|\vec{r}\,'(\varphi)\|^2 &= (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)^2 + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)^2 \\ &= \cos^2\varphi - 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\cos^2\varphi \\ &= 1 + \varphi^2\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}L(\vec{r}) &= \int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(\varphi)\|\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+\varphi^2} + \sqrt{1+\varphi^2}}{2}\,d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2}\right) d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2}\right) d\varphi \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arsinh}\varphi + \varphi\sqrt{1+\varphi^2}\right)\Big|_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{\operatorname{Arsinh} 2\pi}{2} + \pi\sqrt{1+4\pi^2}\,.\end{aligned}$$



Bemerkung: Diese Kurve heißt Archimedische Spirale.

Aufgabe 5

a) Für $-1 < t < 1$ gilt

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t^2} \\ 1 \\ -t/\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

Für $t_0 \in (-1, 1)$ ist daher

$$\vec{r}(t_0) + \lambda\vec{r}\,'(t_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Arcsin} t_0 \\ t_0 \\ \sqrt{1-t_0^2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t_0^2} \\ 1 \\ -t_0/\sqrt{1-t_0^2} \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

eine Parameterdarstellung der Tangente im Punkt $\vec{r}(t_0)$.

b) Für $t \in [-1, 1]$ haben wir

$$g(t) := \int_{-1}^{t} \|\vec{r}\,'(\tau)\|\,d\tau = \int_{-1}^{t} \sqrt{\frac{2}{1-\tau^2}}\,d\tau = \sqrt{2}\operatorname{Arcsin}\tau\Big|_{\tau=-1}^{t} = \sqrt{2}\,(\operatorname{Arcsin} t + \tfrac{\pi}{2})\,.$$

Folglich hat die Kurve $\vec{r}$ die Länge $L(\vec{r}) = s(1) = \sqrt{2}\,\pi$. Wegen

$$g(t) = s \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} = \operatorname{Arcsin} t \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \tfrac{\pi}{2})$$

ist $g^{-1}\colon [0, \sqrt{2}\,\pi] \to [-1, 1]$, $s \mapsto g^{-1}(s) = \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s)$. Damit lautet die Darstellung von $\vec{r}$ bezüglich der Bogenlänge (oder natürliche Parametrisierung)

$$\vec{\varrho}(s) = \vec{r}\,(g^{-1}(s)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{2} \\ -\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s) \\ \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s) \end{pmatrix}, \qquad s \in [0, \sqrt{2}\,\pi]\,.$$

Aufgabe 6

a) Die partielle Ableitung von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nach x im Punkt $\vec{x}_0 = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Richtungsableitung von f in $\vec{x}_0$ in Richtung des ersten Einheitsvektors $\vec{e}_1 = (1,0)$, also

$$\begin{aligned} D_1 f(\vec{x}_0) := D_{\vec{e}_1} f(\vec{x}_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_1) - f(\vec{x}_0)\big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f((x,y) + t(1,0)) - f(x,y)\big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(x+t,y) - f(x,y)\big). \end{aligned}$$

Für festes $y \in \mathbb{R}$ ist dies gerade der Differenzenquotient der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x,y)$. Um die partielle Ableitung von f nach x zu berechnen, können wir also $f(x,y)$ nach x differenzieren, wobei wir y als eine Konstante betrachten.

Entsprechendes erhalten wir für die partielle Ableitung nach y.

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$D_1 f(x,y) = 3x^2 - 4xy^2 + 4y^3 \qquad \text{und} \qquad D_2 f(x,y) = -4x^2y + 12xy^2 + 4y^3\,.$$

Daraus ergibt sich für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} D_1^2 f(x,y) &= 6x - 4y^2\,, & D_2^2 f(x,y) &= -4x^2 + 24xy + 12y^2\,, \\ D_2 D_1 f(x,y) &= -8xy + 12y^2\,, & D_1 D_2 f(x,y) &= -8xy + 12y^2\,. \end{aligned}$$

Bemerkung: Dass $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$ gilt, war wegen des Satzes von Schwarz schon vorher klar, denn die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist zweimal stetig differenzierbar.

b) Hier haben wir

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2xe^{xy} + (x^2+y^2)ye^{xy} = (x^2y + 2x + y^3)e^{xy}\,, \\ D_2 f(x,y) &= 2ye^{xy} + (x^2+y^2)xe^{xy} = (x^3 + xy^2 + 2y)e^{xy}\,. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten

$$\begin{aligned} D_1^2 f(x,y) &= (2xy+2)e^{xy} + (x^2y + y^3 + 2x)ye^{xy} = (x^2y^2 + 4xy + y^4 + 2)e^{xy}\,, \\ D_2^2 f(x,y) &= (2xy+2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)xe^{xy} = (x^4 + x^2y^2 + 4xy + 2)e^{xy}\,, \\ D_1 D_2 f(x,y) &= (3x^2 + y^2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)ye^{xy} = (x^3y + 3x^2 + xy^3 + 3y^2)e^{xy} \\ &= D_2 D_1 f(x,y)\,. \end{aligned}$$

Nach Definition gilt für die Richtungsableitung von f im Punkt $\vec{x}_0 = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ in Richtung $\vec{v} = (v_1,v_2) = (1,1)$

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(x,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)\Big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)\Big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big((x+tv_1)^2 + (y+tv_2)^2\big)e^{(x+tv_1)(y+tv_2)} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big(x^2 + 2txv_1 + t^2v_1^2 + y^2 + 2tyv_2 + t^2v_2^2\big)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big(x^2 + y^2 + 2t(xv_1 + yv_2) + t^2(v_1^2 + v_2^2)\big)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big((x^2+y^2)e^{xy}\big(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1\big) + 2t(xv_1 + yv_2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} \\ &\qquad\qquad + t^2(v_1^2 + v_2^2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}\Big)\,. \end{aligned}$$

Zur Berechnung von $\frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1)$ setzen wir $\alpha := yv_1 + xv_2$ und $\beta := v_1v_2$ und betrachten die durch $g(t) := e^{\alpha t + \beta t^2}$ gegebene Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist g differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $g'(t) = (\alpha + 2\beta t)e^{\alpha t + \beta t^2}$. Nun gilt

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(g(t) - g(0)) = g'(0) = \alpha = yv_1 + xv_2.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned}
D_{\vec{v}}f(x,y) &= (x^2+y^2)e^{xy}(yv_1+xv_2) + 2(xv_1+yv_2)e^{xy}\cdot 1 + 0\\
&= e^{xy}\big((x^2+y^2)(y+x) + 2(x+y)\big)\\
&= e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2).
\end{aligned}$$

Die Richtungsableitung $D_{\vec{v}}f$ kann man auch eleganter bestimmen: Da die partiellen Ableitungen D_1f, D_2f von f stetig sind, ist f differenzierbar. Deshalb gilt nach Satz 1 in 30.4 für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
D_{\vec{v}}f(x,y) &= f'(x,y)\,\vec{v} = \big(D_1f(x,y) \quad D_2f(x,y)\big)\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = e^{xy}\left(x^2y+2x+y^3 \quad x^3+xy^2+2y\right)\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\\
&= e^{xy}\left(x^2y+2x+y^3+x^3+xy^2+2y\right) = e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2).
\end{aligned}$$

c) Für $x,y\in\mathbb{R}$ und $z\in(0,\infty)$ sind

$$D_1f(x,y,z) = e^y/z\,,\qquad D_2f(x,y,z) = xe^y/z\,,\qquad D_3f(x,y,z) = -xe^y/z^2\,.$$

Weiter haben wir

$$D_1^2f(x,y,z) = 0\,,\qquad D_2^2f(x,y,z) = xe^y/z\,,\qquad D_3^2f(x,y,z) = 2xe^y/z^3\,.$$

Und schließlich noch die gemischten Ableitungen zweiter Ordnung:

$$\begin{aligned}
D_2D_1f(x,y,z) &= e^y/z = D_1D_2f(x,y,z)\,,\\
D_3D_1f(x,y,z) &= -e^y/z^2 = D_1D_3f(x,y,z)\,,\\
D_3D_2f(x,y,z) &= -xe^y/z^2 = D_2D_3f(x,y,z)\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 7

a) Auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Stetigkeit von f in $(0,0)$: Gilt $(0,0)\neq(x_k,y_k)\to(0,0)$, so folgt $m_k := \max\{|x_k|,|y_k|\} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, und dies liefert dann

$$|f(x_k,y_k)| \leqslant \frac{|y_k^3| + |x_k^2y_k|}{x_k^2+y_k^2} \leqslant \frac{m_k^3+m_k^3}{m_k^2} = 2m_k \xrightarrow{k\to\infty} 0\,.$$

Das bedeutet $f(x_k,y_k)\to 0 = f(0,0)$, womit die Stetigkeit von f auf ganz $\mathbb{R}^2$ bewiesen ist.

b) Für $(x,y)\neq(0,0)$ erhalten wir mit Hilfe der Quotientenregel

$$D_1f(x,y) = \frac{-2xy(x^2+y^2)-(y^3-x^2y)2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$D_2f(x,y) = \frac{(3y^2-x^2)(x^2+y^2)-(y^3-x^2y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^2y^2-x^4+y^4}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Im Punkt $(0,0)$ dagegen müssen wir auf die Definition der partiellen Ableitung zurückgehen:

$$D_1f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0$$

und

$$D_2f(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^3-0}{0+t^2} = \lim_{t\to 0}1 = 1\,.$$

c) Wegen

$$D_1f(\tfrac{1}{k},\tfrac{1}{k}) = -\frac{4k^{-4}}{(k^{-2}+k^{-2})^2} = -1 \xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 0 = D_1f(0,0)$$

und

$$D_2f(\tfrac{1}{k},0) = \frac{0-k^{-4}+0}{(k^{-2}+0)^2} = -1 \xrightarrow{k\to\infty} -1\neq 1 = D_2f(0,0)$$

sind die partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$ nicht stetig.