Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2010
20.05.2010

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

6. Übungsblatt

Aufgabe 1

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \vec{f}(x,y,z) = \big(xy^2z^3e^{xy^2z^3},\ x^2e^y + \sin x\big)$

b) $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ \vec{f}(x,y) = \big(ye^x + x\sinh y,\ y^4 + 3x^2\sin y,\ 4y - x^3\big)$

c) $f\colon \mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(w,x,y,z) = x^y$

d) $\vec{f}\colon (0,\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \vec{f}(r,\varphi,z) = \big(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z\big)$

Berechnen Sie in **d)** zudem die Funktionaldeterminante $\det J_{\vec{f}}$.

Aufgabe 2

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei im Punkt (x_0, y_0) differenzierbar. Für die Richtungen $\vec{u} := (1,2)$ und $\vec{v} := (-1,1)$ gelte

$$D_{\vec{u}}f(x_0,y_0) = -1\,, \qquad D_{\vec{v}}f(x_0,y_0) = 2\,.$$

Bestimmen Sie $D_{\vec{w}}f(x_0,y_0)$ für $\vec{w} = (1,1)$. Geben Sie die Richtung $\vec{h}$ mit $\|\vec{h}\| = 1$ an, für die $D_{\vec{h}}f(x_0,y_0)$ maximal wird.

Aufgabe 3

Betrachten Sie nochmals die Funktion aus Aufgabe 7 vom 5. Übungsblatt, die folgendermaßen definiert war:

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $D_{\vec{v}}f(0,0)$ für jede Richtung $\vec{v}$, für die das möglich ist. Für welche $\vec{v}$ gilt $D_{\vec{v}}f(0,0) = (\nabla f(0,0))\cdot\vec{v}$?

b) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort f'.

Aufgabe 4

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

- **a)** Zeigen Sie, dass f stetig ist.
- **b)** Berechnen Sie $\nabla f(x,y)$ für alle Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in denen das möglich ist.
- **c)** Berechnen Sie $D_1 D_2 f(0,0)$ und $D_2 D_1 f(0,0)$.
- **d)** Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort f'.
- **e)** Ist f zweimal stetig differenzierbar?

Aufgabe 5

Die Funktionen $\vec{f}, \vec{g}, \vec{h}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind definiert durch

$$\vec{f}(x,y) = \big(x^2,\, y^2\big)\,, \qquad \vec{g}(x,y) = \big(\sin(xy),\, e^{x+y}\big)\,, \qquad \vec{h}(x,y) = \big(e^x \cos y,\, \sinh x\big)\,.$$

Berechnen Sie die Ableitungen von $\vec{f}$, $\vec{g}$ und $\vec{h}$, und ermitteln Sie dann mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen der Funktionen $\vec{g} \circ \vec{f}$ und $\vec{h} \circ \vec{g}$. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie $\vec{g} \circ \vec{f}$ und $\vec{h} \circ \vec{g}$ explizit angeben und ableiten.

Aufgabe 6

Wir führen auf $\mathbb{R}^2$ Polarkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ein. Sei $u\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $v(r,\varphi) := u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ für $r > 0$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.

- **a)** Stellen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial v}{\partial r} := D_1 v$ und $\frac{\partial v}{\partial \varphi} := D_2 v$ mit Hilfe der partiellen Ableitungen von u dar.
- **b)** Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator in Polarkoordinaten die folgende Gestalt hat

$$\Delta u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r,\varphi)\,,$$

wobei $\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} := D_1^2 v$ und $\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} := D_2^2 v$ gesetzt seien.

Die **Prüfungen** zu HM II und KAI finden am **Montag, den 20.09.2010,** statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss**: Freitag, der 16.07.2010.
Weitere Informationen zu den Prüfungen entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage

`www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etechphys2010s/`.