Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2010

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Sei $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \vec{f}(x,y,z) = \left(xy^2z^3e^{xy^2z^3},\ x^2e^y + \sin x\right) =: (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$.

Da alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von $\vec{f}$

$$\begin{aligned}
D_1f_1(x,y,z) &= y^2z^3e^{xy^2z^3} + xy^2z^3e^{xy^2z^3}y^2z^3 = y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
D_2f_1(x,y,z) &= 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
D_3f_1(x,y,z) &= 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
D_1f_2(x,y,z) &= 2xe^y + \cos x,\\
D_2f_2(x,y,z) &= x^2e^y,\\
D_3f_2(x,y,z) &= 0
\end{aligned}$$

auf $\mathbb{R}^3$ stetig sind, ist $\vec{f}$ auf $\mathbb{R}^3$ differenzierbar. Für die Ableitung von $\vec{f}$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\vec{f}\,'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} D_1f_1(x,y,z) & D_2f_1(x,y,z) & D_3f_1(x,y,z)\\ D_1f_2(x,y,z) & D_2f_2(x,y,z) & D_3f_2(x,y,z)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3}\\ 2xe^y+\cos x & x^2e^y & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

b) Auch hier sind alle partiellen Ableitungen von $\vec{f}$ stetig, so dass $\vec{f}$ differenzierbar ist mit

$$\vec{f}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x + \sinh y & e^x + x\cosh y\\ 6x\sin y & 4y^3 + 3x^2\cos y\\ -3x^2 & 4\end{pmatrix}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

c) Aufgrund von $x^y = e^{y\ln x}$ gilt $D_2f(w,x,y,z) = e^{y\ln x}y/x$, $D_3f(w,x,y,z) = e^{y\ln x}\ln x$ und $D_1f(w,x,y,z) = D_4f(w,x,y,z) = 0$. Also sind sämtliche partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ stetig, woraus die Differenzierbarkeit von f auf $\mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ folgt. Für $(w,x,y,z)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)\times\mathbb{R}^2$ gilt

$$\begin{aligned}
f'(w,x,y,z) &= \begin{pmatrix} D_1f(w,x,y,z) & D_2f(w,x,y,z) & D_3f(w,x,y,z) & D_4f(w,x,y,z)\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & yx^{y-1} & x^y\ln x & 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

d) Die Jakobimatrix von $\vec{f}$ an der Stelle $(r,\varphi,z)\in(0,\infty)\times(0,2\pi)\times\mathbb{R}$ lautet

$$J_{\vec{f}}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} D_1f_1(r,\varphi,z) & D_2f_1(r,\varphi,z) & D_3f_1(r,\varphi,z)\\ D_1f_2(r,\varphi,z) & D_2f_2(r,\varphi,z) & D_3f_2(r,\varphi,z)\\ D_1f_3(r,\varphi,z) & D_2f_3(r,\varphi,z) & D_3f_3(r,\varphi,z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0\\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Da alle partiellen Ableitungen von $\vec{f}$ stetig sind, ist $\vec{f}$ differenzierbar und es gilt $\vec{f}\,' = J_{\vec{f}}$. Außerdem ist $\det(J_{\vec{f}}(r,\varphi,z)) =_{[\text{Entw. } S3]} 1\cdot\det\left(\begin{smallmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{smallmatrix}\right) = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r$.

Bemerkung: Die Funktion $\vec{f}$ bildet die Zylinderkoordinaten (r,φ,z) eines Punktes des $\mathbb{R}^3$ auf die kartesischen Koordinaten ab.

Aufgabe 2

Wir bestimmen zunächst $f'(x_0, y_0)$. Da f in (x_0, y_0) differenzierbar ist, gilt

$$f'(x_0, y_0)\vec{u} = D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = -1 \qquad \text{und} \qquad f'(x_0, y_0)\vec{v} = D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = 2\,.$$

Setzen wir abkürzend $\alpha := D_1 f(x_0, y_0)$ und $\beta := D_2 f(x_0, y_0)$, so ist $f'(x_0, y_0) = (\alpha \;\; \beta)$, also $f'(x_0, y_0)\vec{u} = \alpha + 2\beta$ und $f'(x_0, y_0)\vec{v} = -\alpha + \beta$. Obige Gleichungen lassen sich daher schreiben als

$$\alpha + 2\beta = -1 \qquad \text{und} \qquad -\alpha + \beta = 2\,.$$

Hieraus erhält man durch Addieren $3\beta = 1$, also $\beta = \frac{1}{3}$, und damit $\alpha = -\frac{5}{3}$. Folglich ist $f'(x_0, y_0) = (-\frac{5}{3} \;\; \frac{1}{3}) \in \mathbb{R}^{(1,2)}$ und aufgrund der Differenzierbarkeit von f in (x_0, y_0) ergibt sich

$$D_{\vec{w}} f(x_0, y_0) = f'(x_0, y_0)\vec{w} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{4}{3}\,.$$

Wie wir aus der Vorlesung wissen, ist die gesuchte Richtung $\vec{h}$ gegeben durch

$$\vec{h} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

a) Es sei $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ eine beliebige Richtung. Dann gilt

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0) + h\vec{v}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(hv_2)^3 - (hv_1)^2 hv_2}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 v_2^3 - h^3 v_1^2 v_2}{h^3(v_1^2 + v_2^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}\,. \end{aligned}$$

Dies soll nun mit

$$(\nabla f(0,0)) \cdot \vec{v} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2$$

[(∗) siehe Aufgabe 7 b), 5. Übungsblatt] verglichen werden. Es gilt

$$\frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = v_2 \iff v_2^3 - v_1^2 v_2 = v_2(v_1^2 + v_2^2) \iff 2v_1^2 v_2 = 0\,.$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ist.

b) Nicht für alle Richtungen $\vec{v}$ gilt die Gleichung $D_{\vec{v}} f(0,0) = (\nabla f(0,0)) \cdot \vec{v}$. Folglich kann die Funktion f in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein, denn sonst müsste diese Gleichung für alle Richtungen $\vec{v}$ gelten.

Da die partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig sind (vgl. Aufgabe 7 b), 5. Übungsblatt), ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ differenzierbar und für $(x, y) \neq (0, 0)$ gilt

$$f'(x,y) = \big(\nabla f(x,y)\big)^T = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} -4xy^3 & -x^4 + 4x^2y^2 + y^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(1,2)}.$$

Aufgabe 4

a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig; wir müssen also nur noch die Stetigkeit von f in $(0,0)$ nachweisen: Wegen

$$\left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

gilt $|f(x,y)| \leqslant |xy|$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$. Damit folgt $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\,\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} \\ &= \frac{y(x^2-y^2)(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}\,, \end{aligned}$$

und wegen $f(x,y) = -f(y,x)$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} D_2 f(x,y) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-f(y+h,x)+f(y,x)}{h} \\ &= -\lim_{h\to 0}\frac{f(y+h,x)-f(y,x)}{h} = -D_1 f(y,x) = -\frac{y^4x+4y^2x^3-x^5}{(y^2+x^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt also

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} D_1 f(x,y) \\ D_2 f(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^4y+4x^2y^3-y^5 \\ x^5-4x^3y^2-xy^4 \end{pmatrix}.$$

Für die partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt erhalten wir

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

und

$$D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0\,.$$

Somit ist $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

c) Definitionsgemäß gilt

$$D_1D_2 f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{D_2 f(h,0)-D_2 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{D_2 f(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{h^5-0-0}{(h^2+0)^2} = 1\,.$$

Ebenso erhält man

$$D_2D_1 f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{D_1 f(0,h)-D_1 f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{D_1 f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0+0-h^5}{h(0+h^2)^2} = -1\,.$$

d) Wie wir wissen, gilt

$$\nabla f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^4y+4x^2y^3-y^5 \\ x^5-4x^3y^2-xy^4 \end{pmatrix}$$

auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Dort existieren also die partiellen Ableitungen erster Ordnung und sind stetig, d. h. f ist dort stetig partiell differenzierbar. Aus der Vorlesung wissen wir, dass dies die Differenzierbarkeit von f impliziert. Die Ableitung ist

$$f'(x,y) = \big(\nabla f(x,y)\big)^T = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} x^4y+4x^2y^3-y^5 & x^5-4x^3y^2-xy^4 \end{pmatrix}.$$

Weiter ist bekannt: $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Für $(x,y) \neq (0,0)$ sei $z := \max\{|x|,|y|\}$. Es gilt

$$|D_1 f(x,y)| = \frac{|x^4y+4x^2y^3-y^5|}{(x^2+y^2)^2} \leqslant \frac{z^5+4z^5+z^5}{(z^2)^2} = 6z = 6\max\{|x|,|y|\}\,.$$

Damit folgt $D_1 f(x,y) \to 0 = D_1 f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$. Genauso sieht man ein, dass $D_2 f$ in $(0,0)$ stetig ist. Also ist f in $(0,0)$ stetig partiell differenzierbar und damit differenzierbar, und es gilt $f'(0,0) = (0\ 0)$.

e) Die Funktion f ist nicht zweimal stetig differenzierbar, denn sonst müssten $D_1D_2 f$ und $D_2D_1 f$ nach dem Satz von Schwarz übereinstimmen, was aber nach **c)** nicht der Fall ist.

Aufgabe 5

Offensichtlich besitzen alle drei Funktionen stetige partielle Ableitungen und sind damit differenzierbar. Für $\vec{f}$ mit den Komponentenfunktionen $f_1(x,y) := x^2$ und $f_2(x,y) := y^2$ gilt daher

$$\vec{f}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(x,y) & D_2 f_1(x,y) \\ D_1 f_2(x,y) & D_2 f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix},$$

und ebenso ergibt sich

$$\vec{g}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{h}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ \cosh x & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel kommen wir dann auf

$$\begin{aligned}(\vec{g} \circ \vec{f}\,)'(x,y) &= \vec{g}\,'\big(\vec{f}(x,y)\big)\,\vec{f}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} y^2\cos(x^2y^2) & x^2\cos(x^2y^2) \\ e^{x^2+y^2} & e^{x^2+y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Für die Funktion $\vec{h} \circ \vec{g}$ erhält man

$$\begin{aligned}(\vec{h} \circ \vec{g}\,)'(x,y) &= \vec{h}\,'\big(\vec{g}(x,y)\big)\,\vec{g}\,'(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) & -e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) \\ \cosh(\sin(xy)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

und Ausmultiplizieren liefert für $(\vec{h} \circ \vec{g}\,)'(x,y)$ die $(2,2)$-Matrix

$$= \begin{pmatrix} \big(y\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} & \big(x\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$\vec{g} \circ \vec{f}(x,y) = \vec{g}(\vec{f}(x,y)) = \vec{g}(x^2,y^2) = \big(\sin(x^2y^2),\, e^{x^2+y^2}\big) =: (u_1(x,y), u_2(x,y))$$

erhalten wir

$$(\vec{g} \circ \vec{f}\,)'(x,y) = \begin{pmatrix} D_1 u_1(x,y) & D_2 u_1(x,y) \\ D_1 u_2(x,y) & D_2 u_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$\vec{h} \circ \vec{g}(x,y) = \vec{h}(\vec{g}(x,y)) = \vec{h}\big(\sin(xy),\, e^{x+y}\big) = \big(e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}), \sinh(\sin(xy))\big) =: (v_1(x,y), v_2(x,y))$$

und für die Ableitung ergibt sich

$$(\vec{h} \circ \vec{g}\,)'(x,y) = \begin{pmatrix} D_1 v_1(x,y) & D_2 v_1(x,y) \\ D_1 v_2(x,y) & D_2 v_2(x,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \big(y\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} & \big(x\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6

Im folgenden schreiben wir nur f_x bzw. f_y anstelle von $D_1 f$ bzw. $D_2 f$. Ebenso kürzen wir partielle Ableitungen höherer Ordnung ab, z.B. $f_{xy} := (f_x)_y$ anstatt $D_2 D_1 f := D_2(D_1 f)$, etc.

a) Für $r > 0$ und $\varphi \in (0, 2\pi)$ gilt

$$v(r,\varphi) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = u(g(r,\varphi)) = (u \circ g)(r,\varphi)$$

mit $g\colon (0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$, $g(r,\varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Anwendung der Kettenregel ergibt

$$v'(r,\varphi) = u'(g(r,\varphi))\, g'(r,\varphi) = \begin{pmatrix} u_x(g(r,\varphi)) & u_y(g(r,\varphi)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Wegen $v'(r,\varphi) = (v_r(r,\varphi) \;\; v_\varphi(r,\varphi))$ erhält man für die partiellen Ableitungen von v

$$\begin{aligned} v_r(r,\varphi) &= \cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi), \\ v_\varphi(r,\varphi) &= -r\sin\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + r\cos\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{aligned}$$

b) Nach einer ähnlichen Rechnung wie in **a)** sieht man

$$\begin{aligned} v_{rr}(r,\varphi) &= \cos\varphi\,\bigl(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\cos\varphi + u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\sin\varphi\bigr) \\ &\qquad + \sin\varphi\,\bigl(u_{yx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\cos\varphi + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,\sin\varphi\bigr) \\ &\overset{(*)}{=} \cos^2\varphi\, u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + 2\sin\varphi\,\cos\varphi\, u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin^2\varphi\, u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} v_{\varphi\varphi}(r,\varphi) &= -r\cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\qquad - r\sin\varphi\,\bigl(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,(-r\sin\varphi) + u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi\bigr) \\ &\qquad - r\sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\qquad + r\cos\varphi\,\bigl(u_{yx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,(-r\sin\varphi) + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\cos\varphi\bigr) \\ &\overset{(*)}{=} -r\cos\varphi\, u_x(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - r\sin\varphi\, u_y(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\qquad + r^2\sin^2\varphi\, u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) - 2r^2\sin\varphi\,\cos\varphi\, u_{xy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \\ &\qquad + r^2\cos^2\varphi\, u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{aligned}$$

[Zu $(*)$: Nach dem Satz von Schwarz gilt für die zweimal stetig differenzierbare Funktion u: $u_{xy} = u_{yx}$.] Daher ist

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}(r,\varphi) = v_{rr}(r,\varphi) + \frac{1}{r}\, v_r(r,\varphi) + \frac{1}{r^2}\, v_{\varphi\varphi}(r,\varphi) \\ &\quad = (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\bigl(u_{xx}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + u_{yy}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\bigr) \\ &\quad = \Delta u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \Delta u(x,y) \end{aligned}$$

mit $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$.