Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2010
27.05.2010

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

7. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xe^z - y^2$, um den Entwicklungspunkt $\vec{x}_0 = (1,-1,0)$.

b) Berechnen Sie das Taylorpolynom dritten Grades der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos(x)\,\sin(y)\,e^{x-y}$, um den Entwicklungspunkt $\vec{x}_0 = (0,0)$.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils alle Stellen lokaler Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maximal- oder Minimalstellen handelt.

a) $f(x,y) = xy + x - 2y - 2$

b) $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$

c) $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$

Aufgabe 3

Es sei $Q := [0,5] \times [0,5] \subset \mathbb{R}^2$. Die Funktion $f\colon Q \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x,y) = x^2y - 4xy + 4y - 2x^2 - 2\,.$$

Begründen Sie, dass f auf Q Maximum und Minimum besitzt, und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 4

Ermitteln Sie mit Hilfe der Multiplikatorenregel von Lagrange diejenigen Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ auf der Kurve $x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = 0$, die vom Punkt $(-1,1)$ den kleinsten bzw. den größten Abstand haben. Geben Sie die Abstände an.

Aufgabe 5

Berechnen Sie die globalen Extrema von

$$f(x,y,z) := 5x + y - 3z$$

auf der Menge $S = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\big\}$.

Aufgabe 6

Die Funktion $\vec{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$\vec{g}(x,y) = \begin{pmatrix} \cosh x & \cos y \\ \sinh x & \sin y \end{pmatrix}.$$

a) Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung U von $(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ und eine Umgebung V von $(0, \frac{3}{4})$ so, dass U durch die Funktion $\vec{g}$ bijektiv auf V abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\vec{g}$ in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, dass aber $\vec{g}$ nicht injektiv ist.

Aufgabe 7

a) Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3 = 0$ in einer Umgebung von $(0,0,-2)$ nach z aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x,y)$ die Ableitung $g'(x,y)$.

b) Betrachten Sie die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1.$$

Zeigen Sie: Durch diese Gleichungen werden in einer Umgebung des Punktes $(0,0)$ zwei C^1-Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ mit $u(0,0) = v(0,0) = 1$ implizit definiert.

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung dieser Funktionen in $(0,0)$.

Die **Prüfungen** zu HM II und KAI finden am **Montag, den 20.09.2010,** statt.

Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss**: Freitag, der 16.07.2010.

Weitere Informationen zu den Prüfungen entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage

www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etechphys2010s/.