Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2010
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Das Taylorpolynom von f zweiten Grades um den Punkt $\vec{x}_0$ ist gegeben durch

$$T_2(f,\vec{x}_0)(\vec{x}\,) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0) + \tfrac{1}{2}(\vec{x}-\vec{x}_0)^T H_f(\vec{x}_0)(\vec{x}-\vec{x}_0)\,.$$

Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = xe^z - y^2$, ergibt sich

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} e^z \\ -2y \\ xe^z \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^z \\ 0 & -2 & 0 \\ e^z & 0 & xe^z \end{pmatrix}.$$

Für $\vec{x}_0 := (x_0,y_0,z_0) := (1,-1,0)$ gilt also

$$f(\vec{x}_0) = 0\,, \qquad \nabla f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad H_f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} T_2(f,\vec{x}_0)(x,y,z) &= 0 + (x-x_0) + 2(y-y_0) + (z-z_0) \\ &\quad + \tfrac{1}{2}\big(-2(y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 + 2(x-x_0)(z-z_0)\big) \\ &= (x-1) + 2(y+1) + z - (y+1)^2 + \tfrac{1}{2}z^2 + (x-1)z\,. \end{aligned}$$

b) Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = \cos(x)\,\sin(y)\,e^{x-y}$, gilt

$$\begin{array}{lll} f(x,y) & = e^{x-y}\cos x \sin y & \Rightarrow\ f(0,0) = 0 \\ f_x(x,y) & = e^{x-y}(\cos x\sin y - \sin x \sin y) & \Rightarrow\ f_x(0,0) = 0 \\ f_y(x,y) & = e^{x-y}(\cos x\cos y - \cos x\sin y) & \Rightarrow\ f_y(0,0) = 1 \\ f_{xx}(x,y) & = e^{x-y}(-2\sin x\sin y) & \Rightarrow\ f_{xx}(0,0) = 0 \\ f_{xy}(x,y) & = e^{x-y}(\sin x\sin y - \sin x\cos y - \cos x\sin y + \cos x\cos y) & \Rightarrow\ f_{xy}(0,0) = 1 \\ f_{yy}(x,y) & = e^{x-y}(-2\cos x\cos y) & \Rightarrow\ f_{yy}(0,0) = -2 \\ f_{xxx}(x,y) & = e^{x-y}(-2\cos x\sin y - 2\sin x\sin y) & \Rightarrow\ f_{xxx}(0,0) = 0 \\ f_{xxy}(x,y) & = e^{x-y}(-2\sin x\cos y + 2\sin x\sin y) & \Rightarrow\ f_{xxy}(0,0) = 0 \\ f_{xyy}(x,y) & = e^{x-y}(2\sin x\cos y - 2\cos x\cos y) & \Rightarrow\ f_{xyy}(0,0) = -2 \\ f_{yyy}(x,y) & = e^{x-y}(2\cos x\sin y + 2\cos x\cos y) & \Rightarrow\ f_{yyy}(0,0) = 2 \end{array}$$

Damit ist für $\vec{x} = (x,y)$

$$\begin{aligned} T_3(f,(0,0))(\vec{x}) &= \sum_{j=0}^{3}\frac{1}{j!}\,(\vec{x}\cdot\nabla)^j f(0,0) = \sum_{j=0}^{3}\sum_{j_1+j_2=j}\frac{1}{j_1!\,j_2!}\,x^{j_1}y^{j_2}D_1^{j_1}D_2^{j_2}f(0,0) \\ &= f(0,0) + \sum_{j_1+j_2=1}\frac{1}{j_1!\,j_2!}\,x^{j_1}y^{j_2}D_1^{j_1}D_2^{j_2}f(0,0) + \sum_{j_1+j_2=2}\frac{1}{j_1!\,j_2!}\,x^{j_1}y^{j_2}D_1^{j_1}D_2^{j_2}f(0,0) \\ &\quad + \sum_{j_1+j_2=3}\frac{1}{j_1!\,j_2!}\,x^{j_1}y^{j_2}D_1^{j_1}D_2^{j_2}f(0,0) \\ &= 0 + \big(y+0\big) + \big(\tfrac{1}{2!}\,y^2\cdot(-2) + xy\cdot 1 + 0\big) + \big(\tfrac{1}{3!}\,y^3\cdot 2 + \tfrac{1}{2!}\,xy^2\cdot(-2) + 0 + 0\big) \\ &= y + xy - xy^2 - y^2 + \tfrac{1}{3}\,y^3\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Offenbar gilt jeweils $f \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, denn die Funktionen sind beliebig oft partiell differenzierbar. Man erhält also alle Kandidaten für lokale Extremstellen durch Nullsetzen des Gradienten und kann sie dann mit Hilfe der Hessematrix genauer untersuchen.

a) Es gilt $\nabla f(x,y) = (y+1, x-2) \overset{!}{=} (0,0)$ genau dann, wenn $(x,y) = (2,-1)$ ist. Somit ist $(2,-1)$ der einzige stationäre Punkt von f. Wegen $\det H_f(2,-1) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 < 0$ ist die Hesse-Matrix $H_f(2,-1)$ indefinit, so dass f in $(2,-1)$ einen Sattelpunkt besitzt.

b) Der Gradient von f lautet $\nabla f(x,y) = (6x^2 - 3y, -3x + 6y^2)$. Die erste Komponente ist $= 0$ genau dann, wenn $y = 2x^2$ ist. In diesem Fall ergibt sich für die zweite Komponente $-3x + 24x^4 = 3x(8x^3 - 1)$. Die stationären Punkte sind also $(0,0)$ und $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Die Hesse-Matrix von f ist gegeben durch $H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x & -3 \\ -3 & 12y \end{pmatrix}$.

Da $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte -3 und 3 besitzt, ist $H_f(0,0)$ indefinit. (Alternative Begründung: $\det H_f(0,0) = -9 < 0$.) Deshalb ist $(0,0)$ ein Sattelpunkt.

Da $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ die Eigenwerte 3 und 9 besitzt, ist $H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ positiv definit. (Alternativ mit Satz 2, Kap. 25: $6 > 0$ und $\det H_f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 27 > 0$.) Somit hat f in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ein lokales Minimum.

c) Bei dieser Funktion gilt für die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2xe^{-(x^2+y^2)} - 2x(x^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)} = (2x - 2x^3 - 4xy^2)e^{-(x^2+y^2)}, \\ f_y(x,y) &= 4ye^{-(x^2+y^2)} - 2y(x^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)} = (4y - 2x^2y - 4y^3)e^{-(x^2+y^2)}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Äquivalenzenkette

$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) = (0,0) &\iff 2x - 2x^3 - 4xy^2 = 0 \quad \text{und} \quad 4y - 2x^2y - 4y^3 = 0 \\ &\iff (x = 0 \text{ oder } 1 - x^2 - 2y^2 = 0) \quad \text{und} \quad (y = 0 \text{ oder } 2 - x^2 - 2y^2 = 0) \\ &\iff (x = y = 0) \text{ oder } (x = 0 \text{ und } 2 - 2y^2 = 0) \text{ oder } (1 - x^2 = 0 \text{ und } y = 0). \end{aligned}$$

Als Stellen lokaler Extrema kommen also die Punkte $(0,0)$, $(0,\pm 1)$ und $(\pm 1, 0)$ in Frage.

Der Nullpunkt ist sehr einfach zu untersuchen: Wegen $f(0,0) = 0 < f(x,y)$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$ hat f in $(0,0)$ ein globales Minimum.

Für die anderen Punkte bestimmen wir dagegen die Hessematrix; es gilt

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= (2 - 6x^2 - 4y^2)e^{-(x^2+y^2)} - 2xf_x(x,y), \\ f_{yy}(x,y) &= (4 - 2x^2 - 12y^2)e^{-(x^2+y^2)} - 2yf_y(x,y), \\ f_{xy}(x,y) &= -8xye^{-(x^2+y^2)} - 2yf_x(x,y) = f_{yx}(x,y) = -4xye^{-(x^2+y^2)} - 2xf_y(x,y). \end{aligned}$$

Da an den stationären Stellen f_x und f_y verschwinden, erhalten wir

$$H_f(0,\pm 1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,\pm 1) & f_{xy}(0,\pm 1) \\ f_{yx}(0,\pm 1) & f_{yy}(0,\pm 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -8e^{-1} \end{pmatrix}.$$

Wegen $-2e^{-1} < 0$ und $\det H_f(0,\pm 1) = 16e^{-2} > 0$ ist diese Matrix negativ definit, daher hat f in den Punkten $(0,\pm 1)$ lokale Maxima; der Wert ist jeweils $f(0,\pm 1) = 2e^{-1}$.

Noch zwei stationäre Stellen sind zu untersuchen: Es gilt

$$H_f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} -4e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix},$$

und wegen $\det H_f(\pm 1, 0) = -8e^{-1} < 0$ ist diese $(2,2)$-Matrix indefinit. In den beiden Punkten $(\pm 1, 0)$ hat f folglich keine Extrema, sondern Sattelpunkte.

Aufgabe 3

Da Q abgeschlossen und beschränkt ist und f auf Q stetig ist, nimmt f auf Q Maximum und Minimum an, d.h. es gibt $q_1, q_2 \in Q$ mit $f(q_1) = \max f(Q)$ und $f(q_2) = \min f(Q)$.
Wir betrachten f zunächst im Inneren von Q, also auf $(0,5) \times (0,5)$. Es ist

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2xy - 4y - 4x \\ x^2 - 4x + 4 \end{pmatrix}.$$

Gilt $\nabla f(x,y) = (0,0)$, so liefert die zweite Komponente $(x-2)^2 = 0$, d.h. $x = 2$. Für $x = 2$ lautet die erste Komponente -8. Diese ist stets $\neq 0$, so dass es keine stationären Punkte von f gibt. Daher besitzt f keine lokalen Extremstellen in $(0,5) \times (0,5)$ und die Extrema von f werden auf dem Rand von Q angenommen. Wir untersuchen f auf dem Rand von Q:
$x = 0$: $f(0,y) = 4y - 2$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(0,5) = 18$ und minimal für $y = 0$ mit $f(0,0) = -2$.
$x = 5$: $f(5,y) = 9y - 52$. Dies wird maximal für $y = 5$ mit $f(5,5) = -7$ und minimal für $y = 0$ mit $f(5,0) = -52$.
$y = 0$: $f(x,0) = -2x^2 - 2 =: g_1(x)$. Wegen $g_1'(x) = -4x \leqslant 0$ für $x \in [0,5]$ ist g_1 auf $[0,5]$ monoton fallend. Daher sind 0 und 5 die Extremstellen von $g_1 = f(\cdot, 0)$ mit $f(0,0) = -2$ und $f(5,0) = -52$.
$y = 5$: $f(x,5) = 3x^2 - 20x + 18 =: g_2(x)$. Wegen $g_2'(x) = 6x - 20 = 0 \iff x = \frac{10}{3} \in (0,5)$ müssen wir $f(0,5) = 18$, $f(\frac{10}{3}, 5) = -\frac{46}{3}$ und $f(5,5) = -7$ berücksichtigen.
Insgesamt erhalten wir

$$\max_{(x,y)\in Q} f(x,y) = 18 \quad \text{und} \quad \min_{(x,y)\in Q} f(x,y) = -52.$$

Aufgabe 4

Äquivalent zur Mini- bzw. Maximierung des Abstandes ist die Mini- bzw. Maximierung des Abstandquadrates

$$f(x,y) := \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2.$$

Die Nebenbedingung ist gegeben durch die Kurve

$$g(x,y) := x^2 + y^2 - 2x + 2y + 1 = (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 = 0,$$

also durch die Kreislinie um $(1,-1)$ mit dem Radius 1. Um die Multiplikatorenregel von Lagrange anwenden zu können, muss für die in Frage kommenden Punkte

$$\operatorname{rang} g'(x,y) = \operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2(x-1) & 2(y+1) \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} 1$$

überprüft werden. Dies ist nur im Punkt $(1,-1)$ (Kreismittelpunkt) nicht erfüllt, welcher wegen $g(1,-1) = -1 \neq 0$ nicht auf der Kreislinie liegt und somit nicht Extremalkandidat ist.
Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ und die notwendige Bedingung für Extrema lautet

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 2(x+1) + 2\lambda(x-1) \\ 2(y-1) + 2\lambda(y+1) \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 - 1 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\lambda \neq -1$. Daher erhalten wir aus den ersten beiden Gleichungen

$$x(2+2\lambda) = 2\lambda - 2 \iff x = \frac{\lambda-1}{\lambda+1} \qquad \text{und} \qquad y(2+2\lambda) = 2-2\lambda \iff y = -\frac{\lambda-1}{\lambda+1}.$$

Also ist $y = -x$. Dies eingesetzt in die dritte Gleichung ergibt $2x^2 - 4x + 1 = 0$, also

$$x_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{und damit} \qquad y_{1,2} = -x_{1,2} = -1 \mp \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Folglich sind $P_1 := (1+\frac{1}{\sqrt{2}}, -1-\frac{1}{\sqrt{2}})$ und $P_2 := (1-\frac{1}{\sqrt{2}}, -1+\frac{1}{\sqrt{2}})$ Kandidaten für Extrema. Da Maximum und Minimum der stetigen Funktion f auf der abgeschlossenen und beschränkten Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$ angenommen werden und außerdem $\sqrt{f(P_1)} = 1 + 2\sqrt{2}$ und $\sqrt{f(P_2)} = -1 + 2\sqrt{2}$ gilt, wird im Punkt P_1 der maximale Abstand $1 + 2\sqrt{2}$ und im Punkt P_2 der minimale Abstand $1 - 2\sqrt{2}$ angenommen.

Aufgabe 5

Da die Menge S beschränkt und abgeschlossen ist, nimmt die stetige Funktion f dort ihr Minimum und ihr Maximum an; die Existenz der globalen Extrema ist also gesichert. Definiere

$$\vec{g}(x,y,z) := \begin{pmatrix} g_1(x,y,z) \\ g_2(x,y,z) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x+y+z \\ x^2+y^2+z^2-1 \end{pmatrix}.$$

Dann ist $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{g}(x,y,z) = (0,0)\}$. Zur Bestimmung der globalen Extrema von f auf S verwenden wir die Multiplikatorenregel von Lagrange. Zunächst überprüfen wir die Voraussetzungen: Sowohl f als auch $\vec{g}$ sind auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar. Wegen

$$\vec{g}\,'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

gilt $\operatorname{rang} \vec{g}\,'(x,y,z) < 2$ genau für $x = y = z$; solche Punkte können jedoch die Nebenbedingungen $g_1(x,y,z) = 0$ und $g_2(x,y,z) = 0$ nicht erfüllen, denn aus $x+y+z = 0$ folgte dann $x = y = z = 0$ im Widerspruch zu $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Also erhalten wir sämtliche Kandidaten für Extremstellen durch Anwenden der Multiplikatorenregel von Lagrange: Wir setzen

$$\begin{aligned} L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) &:= f(x,y,z) + \lambda_1 g_1(x,y,z) + \lambda_2 g_2(x,y,z) \\ &= 5x + y - 3z + \lambda_1(x+y+z) + \lambda_2(x^2+y^2+z^2-1) \end{aligned}$$

und lösen dann das Gleichungssystem $\nabla L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = \vec{0}$, also die fünf Gleichungen

$$\begin{gathered} 5 + \lambda_1 + 2\lambda_2 x = 0\,, \qquad 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 y = 0\,, \qquad -3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 z = 0\,, \\ x+y+z = 0\,, \qquad x^2+y^2+z^2-1 = 0\,. \end{gathered}$$

Addition der ersten drei Gleichungen liefert

$$3 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2(x+y+z) = 0\,,$$

wegen $x+y+z = 0$ also $\lambda_1 = -1$. Damit wird die erste Gleichung zu $4 + 2\lambda_2 x = 0$, was insbesondere $\lambda_2 \neq 0$ bedeutet. Die zweite Gleichung lautet $2\lambda_2 y = 0$, woraus mit $\lambda_2 \neq 0$ sofort $y = 0$ folgt. Aus $x+y+z = 0$ ergibt sich dann $z = -x$ und in $x^2+y^2+z^2 = 1$ eingesetzt folgt $2x^2 = 1$, d.h. $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Die extremwertverdächtigen Stellen sind damit

$$(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,) \qquad \text{und} \qquad (-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,)\,.$$

Die Funktionswerte dort sind $f(\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,) = 4\sqrt{2}$ bzw. $f(-\frac{1}{2}\sqrt{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}\,) = -4\sqrt{2}$. Folglich besitzt f auf der Menge S das Maximum $4\sqrt{2}$ und das Minimum $-4\sqrt{2}$.

Aufgabe 6

a) Der Umkehrsatz liefert die Behauptung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Die Funktion $\vec{g}$ ist stetig differenzierbar, es gilt $\vec{g}(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = (0, \frac{3}{4})$ und die Matrix $\vec{g}\,'(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ ist regulär. Wir überprüfen diese Voraussetzungen: Die stetige Differenzierbarkeit ist offensichtlich. Weiter ist

$$\vec{g}(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \cosh(\ln 2)\, \cos\frac{\pi}{2} \\ \sinh(\ln 2)\, \sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

denn $\sinh(\ln 2) = \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Schließlich gilt

$$\vec{g}\,'(x,y) = \begin{pmatrix} \sinh x\, \cos y & -\cosh x\, \sin y \\ \cosh x\, \sin y & \sinh x\, \cos y \end{pmatrix},$$

und damit ist

$$\vec{g}\,'(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\cosh(\ln 2) \\ \cosh(\ln 2) & 0 \end{pmatrix}$$

regulär, denn $\cosh(\ln 2) = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \neq 0$.

Nach dem Umkehrsatz gilt

$$\big(\vec{g}^{\,-1}\big)'(0, \tfrac{3}{4}) = \big(\vec{g}\,'(\vec{g}^{\,-1}(0, \tfrac{3}{4}))\big)^{-1} = \big(\vec{g}\,'(\ln 2, \tfrac{\pi}{2})\big)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5/4 \\ 5/4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Die Funktion $\vec{g}$ ist überall stetig differenzierbar und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\det \vec{g}\,'(x,y) = (\sinh x\, \cos y)^2 + (\cosh x\, \sin y)^2 .$$

Diese Determinante wird also nur dann 0, wenn $\sinh x\, \cos y = 0$ und $\cosh x\, \sin y = 0$ gilt. Für $x > 0$ ist dies gleichbedeutend mit $\cos y = 0$ und $\sin y = 0$, kann also nie eintreten. Folglich ist für $x > 0$ die Matrix $\vec{g}\,'(x,y)$ stets regulär. Der Umkehrsatz liefert nun die lokale Invertierbarkeit von $\vec{g}$ in jedem Punkt $(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$.

Trotzdem ist die Funktion $\vec{g}$ auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ nicht injektiv wegen $\vec{g}(x, y + 2\pi) = \vec{g}(x,y)$ für $(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 7

a) Die behauptete Auflösbarkeit folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, wenn wir

$$f(0,0,-2) = 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_z f\,(0,0,-2) \neq 0$$

für die stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$, überprüft haben. Es gilt $f(0,0,-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0$ und

$$\partial_z f\,(x,y,z) = 3z^2 + 4z - 3xy\,, \qquad \text{also} \qquad \partial_z f\,(0,0,-2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 4 \neq 0\,,$$

womit die Behauptung bereits bewiesen ist. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= -\Big(\partial_z f\big(x,y,g(x,y)\big)\Big)^{-1} \partial_{(x,y)} f\big(x,y,g(x,y)\big) \\ &= -\frac{1}{3g(x,y)^2 + 4g(x,y) - 3xy} \begin{pmatrix} -3yg(x,y) + 3x^2 & -3xg(x,y) - 3y^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

b) Wir müssen zeigen, dass in der Nähe von $(0,0,1,1)$ durch die Gleichung

$$\vec{f}(x,y,u,v) = \vec{0}\,, \qquad \text{mit} \quad \vec{f}(x,y,u,v) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - u^2 + v^2 \\ x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

implizite Funktionen u und v definiert werden. Offenbar ist $\vec{f}\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar; zudem sieht man sofort, dass $\vec{f}(0,0,1,1) = \vec{0}$ gilt; die ersten zwei Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen sind also erfüllt. Jetzt müssen wir nur noch prüfen, ob die Matrix $\partial_{(u,v)}\vec{f}\,(0,0,1,1)$ regulär ist. Wegen

$$\vec{f}\,'(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad \partial_{(u,v)}\vec{f}\,(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ -6u & 8v \end{pmatrix}$$

und damit $\partial_{(u,v)}\vec{f}\,(0,0,1,1) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{smallmatrix}\right)$. Diese Matrix ist tatsächlich regulär, denn $\det\left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{smallmatrix}\right) = -4 \neq 0$.

Somit sind die Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen erfüllt. Danach gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\vec{g}\colon U \to \mathbb{R}^2$ mit $\vec{g}(0,0) = (1,1)$ und $\vec{f}(x,y,\vec{g}(x,y)) = \vec{0}$ für alle $(x,y) \in U$. Definiert man u als die erste Komponentenfunktion von $\vec{g}$ und v als die zweite Komponentenfunktion von $\vec{g}$, dann leisten $u, v\colon U \to \mathbb{R}$ das Gewünschte. Außerdem ergibt für sich für $(x,y) \in U$

$$\begin{aligned} \vec{g}\,'(x,y) &= -\big(\partial_{(u,v)}\vec{f}(x,y,\vec{g}(x,y))\big)^{-1}\,\partial_{(x,y)}\vec{f}(x,y,\vec{g}(x,y)) \\ &= -\big(\partial_{(u,v)}\vec{f}(x,y,u(x,y),v(x,y))\big)^{-1}\,\partial_{(x,y)}\vec{f}(x,y,u(x,y),v(x,y)) \\ &= -\begin{pmatrix} -2u(x,y) & 2v(x,y) \\ -6u(x,y) & 8v(x,y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insbesondere für $(x,y) = (0,0)$ ist der zweite Faktor die Nullmatrix, so dass dann

$$\vec{g}\,'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Dies bedeutet, dass $u_x(0,0) = u_y(0,0) = v_x(0,0) = v_y(0,0)$ gilt.

Dieses Ergebnis kann man auch folgendermaßen herleiten: Bilden wir in den beiden Gleichungen $x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0$ und $x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach x, wobei wir $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$ jetzt als die implizit definierten Funktionen auffassen, so ergibt sich

$$2x - 2uu_x + 2vv_x = 0 \qquad \text{und} \qquad 2x - 6uu_x + 8vv_x = 0\,.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0,0) = v(0,0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_x(0,0) + 2v_x(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6u_x(0,0) + 8v_x(0,0) = 0\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_x(0,0) = v_x(0,0) = 0$.

Um die partiellen Ableitungen nach y der implizit definierten Funktionen $u = u(x,y)$ und $v = v(x,y)$ zu berechnen, gehen wir analog wie eben vor. Wir bilden in beiden Gleichungen $x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0$ und $x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach y und erhalten

$$2y - 2uu_y + 2vv_y = 0 \qquad \text{und} \qquad 4y - 6uu_y + 8vv_y = 0\,.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0,0) = v(0,0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_y(0,0) + 2v_y(0,0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6u_y(0,0) + 8v_y(0,0) = 0\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_y(0,0) = v_y(0,0) = 0$.