Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2010
02.06.2010

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

8. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Die Kurve $\vec{\gamma}\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch $\vec{\gamma}(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$. Berechnen Sie

$$\int_{\vec{\gamma}} f\,ds \qquad \text{für} \quad f(x,y,z) := 2z - \sqrt{x^2+y^2}\,.$$

b) Berechnen Sie jeweils das Kurvenintegral $\displaystyle\int_{\vec{\gamma}} \vec{v}\cdot d\vec{s}$.

i) $\vec{v}(x,y,z) = (y,-z,x)\,, \qquad \vec{\gamma}(t) = (\sinh t, \cosh t, \sinh t)\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant \ln 2$

ii) $\vec{v}(x,y) = (\sin x, x^2+y^2)\,, \qquad \vec{\gamma}(t) = \begin{cases} (t,0)\,, & 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ (1,t-1)\,, & 1 < t \leqslant 2 \end{cases}$

c) Ein Massepunkt bewege sich unter der Wirkung des Kraftfeldes $\vec{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (2xy, x^2+y^2)$ auf dem durch die Punkte $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$, $(0,1)$ und $(-1,2)$ (in dieser Reihenfolge) gebildeten Polygonzug $\vec{\gamma}$. Welche Arbeit $\int_{\vec{\gamma}} \vec{f}\cdot d\vec{s}$ wird hierbei verrichtet?

Aufgabe 2

Skizzieren Sie jeweils die Menge $B \subset \mathbb{R}^2$ und berechnen Sie den Flächeninhalt $\iint\limits_B d(x,y)$.

a) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \frac{1}{4}x^2 - 1 < y < 2 - x\right\}$

b) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, y > 0,\ y^2 < x < 4 - y^2\right\}$

Aufgabe 3

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (xy + y^2)\,d(x,y)$ **b)** $\displaystyle\iint\limits_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x+y)\,d(x,y)$

Aufgabe 4

Skizzieren Sie die Integrationsbereiche der folgenden Integrale, vertauschen Sie jeweils die Integrationsreihenfolge und berechnen Sie den Wert der Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2}\,dx\right) dy$ **b)** $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^{y^2+1} x^2 y\,dx\right) dy$

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Beschreiben Sie die folgenden Mengen mittels Polar- bzw. Kugelkoordinaten.

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\} \qquad (R \geqslant r \geqslant 0)$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant ax\} \qquad (R \geqslant 0,\ a > 0)$$

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2,\ x < 0,\ y \geqslant 0,\ z \leqslant 0\}$$

D : nach oben geöffneter Kegel um die z-Achse mit der Spitze im Ursprung und dem Öffnungswinkel $\alpha \in (0, \pi)$

Definition: Sei $\emptyset \neq D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ein stetiges Vektorfeld $\vec{u}\colon D \to \mathbb{R}^n$ heißt *Potentialfeld* (oder *konservatives Feld*), falls ein C^1-Skalarfeld $f\colon D \to \mathbb{R}$ existiert mit $\vec{u} = \nabla f$ auf D. Ein solches f nennt man *Potential von* $\vec{u}$.

Aufgabe 6

Die Funktionen $\vec{v}, \vec{w}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sind gegeben durch

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} y^2 + 2z^3yx \\ 2y + z^3x^2 \\ y^2 + 3z^2yx^2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{w}(x,y,z) := \begin{pmatrix} z^2 \\ e^z \\ ye^z + 2xz \end{pmatrix}.$$

a) Überprüfen Sie jeweils, ob es sich um ein Potentialfeld handelt, und bestimmen Sie gegebenenfalls ein zugehöriges Potential.

b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot d\vec{s} \qquad \text{und} \qquad \int_{\vec{\gamma}} \vec{w} \cdot d\vec{s},$$

wobei die Kurve $\vec{\gamma}\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ durch $\vec{\gamma}(t) = (1-t, t, 0)$ gegeben ist.

Die **Prüfungen** zu HM II und KAI finden am **Montag, den 20.09.2010,** statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss**: Freitag, der 16.07.2010.
Weitere Informationen zu den Prüfungen entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage

www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etechphys2010s/.