Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2010
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Mit $\vec{\gamma}\,'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$ ergibt sich für jedes $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}\|\vec{\gamma}\,'(t)\| &= \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\\ &= \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1} = \sqrt{2+t^2}\,.\end{aligned}$$

Nach Definition des Kurvenintegrals ist dann

$$\begin{aligned}\int_{\vec{\gamma}} f\,ds &= \int_0^{2\pi} f(\vec{\gamma}(t))\,\|\vec{\gamma}\,'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi}\Big(2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\Big)\sqrt{2+t^2}\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,dt = \big[\tfrac{1}{3}(2+t^2)^{3/2}\big]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{3}\big((2+4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2}\big)\\ &= \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\big((1+2\pi^2)^{3/2} - 1\big)\,.\end{aligned}$$

b) **i)** Wir benutzen die Definition des Kurvenintegrals:

$$\begin{aligned}\int_{\vec{\gamma}} \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_0^{\ln 2} \vec{v}(\vec{\gamma}(t))\cdot\vec{\gamma}\,'(t)\,dt = \int_0^{\ln 2}\begin{pmatrix}\cosh t\\ -\sinh t\\ \sinh t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cosh t\\ \sinh t\\ \cosh t\end{pmatrix}dt\\ &= \int_0^{\ln 2}(\cosh^2 t - \sinh^2 t + \sinh t\cosh t)\,dt = \int_0^{\ln 2}(1 + \sinh t\cosh t)\,dt\\ &= \ln 2 + \big[\tfrac{1}{2}\sinh^2 t\big]_0^{\ln 2} = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\sinh^2(\ln 2) = \ln 2 + \tfrac{1}{2}\big(\tfrac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2})\big)^2 = \ln 2 + \tfrac{9}{32}\,.\end{aligned}$$

ii) Die Kurven $\vec{\gamma}_1\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\gamma}_1(t) = (t, 0)$, und $\vec{\gamma}_2\colon [1,2] \to \mathbb{R}^2$, $\vec{\gamma}_2(t) = (1, t-1)$, sind regulär mit $\vec{\gamma}_1(1) = \vec{\gamma}_2(1)$. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_{\vec{\gamma}} \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_{\vec{\gamma}_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\vec{\gamma}_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\vec{\gamma}_1(t))\cdot\vec{\gamma}_1{}'(t)\,dt + \int_1^2 \vec{v}(\vec{\gamma}_2(t))\cdot\vec{\gamma}_2{}'(t)\,dt\\ &= \int_0^1\begin{pmatrix}\sin t\\ t^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}dt + \int_1^2\begin{pmatrix}\sin 1\\ 1+(t-1)^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}dt\\ &= \int_0^1 \sin t\,dt + \int_1^2 \big(1+(t-1)^2\big)\,dt = \big[-\cos t\big]_0^1 + \big[t + \tfrac{1}{3}(t-1)^3\big]_1^2\\ &= (-\cos 1 + 1) + (2 + \tfrac{1}{3} - 1) = \tfrac{7}{3} - \cos 1\,.\end{aligned}$$

c) Schreibe $\vec{f} =: (f_1, f_2)$. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist und die Integrabilitätsbedingung

$$D_1 f_2(x,y) = D_1(x^2+y^2) = 2x = D_2(2xy) = D_2 f_1(x,y) \qquad \text{auf } \mathbb{R}^2$$

erfüllt ist, stellt $\vec{f}$ ein Potentialfeld dar, d.h. es gibt ein Skalarfeld $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ mit $\vec{f} = \nabla\varphi$. Wegen $\partial_x\varphi(x,y) = f_1(x,y) = 2xy$ ist $\varphi(x,y) = x^2 y + \psi(y)$ für eine stetig differenzierbare Funktion $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aus $\partial_y\varphi(x,y) = f_2(x,y)$ und $\partial_y\varphi(x,y) = x^2 + \psi'(y)$ folgt $\psi'(y) = y^2$. Dies ist beispielsweise für $\psi(y) = \frac{1}{3}\,y^3$ erfüllt. Somit ist

$$\varphi(x,y) = x^2 y + \frac{1}{3}\,y^3$$

ein Potential von $\vec{f}$ auf $\mathbb{R}^2$. Die Arbeit A ist gleich dem Wert des Kurvenintegrals

$$A = \int_{\vec{\gamma}} \vec{f} \cdot d\vec{s},$$

welches wegen $\vec{f} = \nabla\varphi$ nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve $\vec{\gamma}$ abhängt:

$$A = \varphi(-1,2) - \varphi(0,0) = \frac{14}{3}.$$

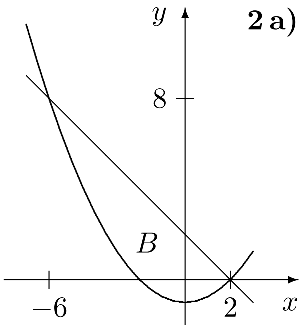
Aufgabe 2

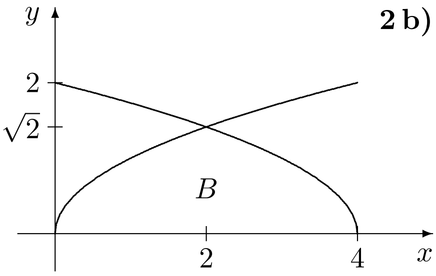
a) Wir bestimmen die Schnittpunkte der beiden Kurven $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$ und $y = 2 - x$. Dazu müssen wir die Lösungen der Gleichung $\frac{1}{4}x^2 - 1 = 2 - x$, also $x^2 + 4x - 12 = 0$ bestimmen. Dies sind $x_1 = -6$ und $x_2 = 2$ (siehe auch Skizze). Für den Flächeninhalt von B ergibt sich

$$\iint_B d(x,y) = \int_{-6}^{2} \int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x} dy\, dx = \int_{-6}^{2} \big((2-x) - (\tfrac{1}{4}x^2 - 1)\big)\, dx = \int_{-6}^{2} (-\tfrac{1}{4}x^2 - x + 3)\, dx$$
$$= \big[-\tfrac{1}{12}x^3 - \tfrac{1}{2}x^2 + 3x\big]_{-6}^{2} = -\tfrac{2}{3} - 2 + 6 - (18 - 18 - 18) = \tfrac{64}{3}.$$

b) Hier schneiden wir die Kurven $x = y^2$ und $x = 4 - y^2$. Dies liefert die Gleichung $y^2 = 4 - y^2$, also $y^2 = 2$. Wegen $y > 0$ interessiert nur die Lösung $y = \sqrt{2}$ (siehe Skizze). Es gilt

$$\iint_B d(x,y) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{4-y^2} dx\, dy = \int_0^{\sqrt{2}} \big((4-y^2) - y^2\big)\, dy = \big[4y - \tfrac{2}{3}y^3\big]_0^{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \tfrac{2}{3}\cdot 2\sqrt{2} = \tfrac{8}{3}\sqrt{2}.$$





Aufgabe 3

Offenbar ist der Integrand jeweils eine stetige Funktion; wir können daher die Integrale mit Hilfe von Satz 1 aus 35.3 berechnen.

a) Es gilt

$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} (xy + y^2)\, d(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 (xy + y^2)\, dy\, dx = \int_0^1 \big[\tfrac{1}{2}xy^2 + \tfrac{1}{3}y^3\big]_{y=0}^{1}\, dx$$
$$= \int_0^1 \big(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}\big)\, dx = \big[\tfrac{1}{4}x^2 + \tfrac{1}{3}x\big]_0^1 = \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{7}{12}.$$

b) Diesmal ergibt sich

$$\iint_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x+y)\, d(x,y) = \int_{-1}^{0} \int_0^2 \cosh(2x+y)\, dy\, dx = \int_{-1}^{0} \big[\sinh(2x+y)\big]_{y=0}^{2}\, dx$$
$$= \int_{-1}^{0} \big(\sinh(2x+2) - \sinh(2x)\big)\, dx = \big[\tfrac{1}{2}\cosh(2x+2) - \tfrac{1}{2}\cosh(2x)\big]_{-1}^{0}$$
$$= \big(\tfrac{1}{2}\cosh 2 - \tfrac{1}{2}\cosh 0\big) - \big(\tfrac{1}{2}\cosh 0 - \tfrac{1}{2}\cosh(-2)\big) = \cosh 2 - 1 = \tfrac{1}{2}(e^2 + e^{-2}) - 1.$$

Aufgabe 4

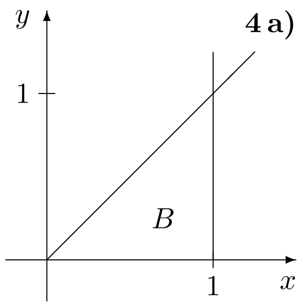
a) Es gilt

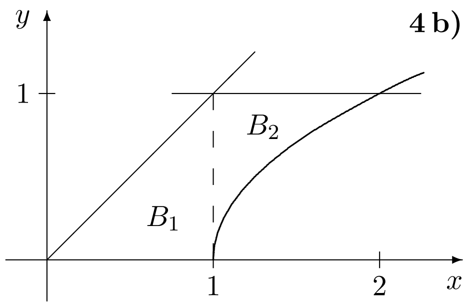
$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x dy\, e^{x^2}\,dx = \int_0^1 x e^{x^2}\,dx = \left[\tfrac{1}{2} e^{x^2}\right]_0^1 = \tfrac{e-1}{2}\,.$$

Bemerkung: Hier ist das innere Integral $\int_y^1 e^{x^2}\,dx$ nicht explizit berechenbar. Für die Bestimmung eines iterierten Integrals kann also die Integrationsreihenfolge wesentlich sein.

b) Wir spalten den Integrationsbereich B in zwei Teile B_1, B_2 auf (siehe Skizze) und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y\,dx\,dy &= \iint\limits_{B_1} x^2 y\,d(x,y) + \iint\limits_{B_2} x^2 y\,d(x,y) \\
&= \int_0^1 \int_0^x x^2 y\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2 y\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2\right]_{y=0}^x dx + \int_1^2 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2\right]_{y=\sqrt{x-1}}^1 dx \\
&= \int_0^1 \tfrac{1}{2} x^4\,dx + \int_1^2 \left(\tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2} x^2 (x-1)\right) dx \\
&= \left[\tfrac{1}{10} x^5\right]_{x=0}^1 + \left[-\tfrac{1}{8} x^4 + \tfrac{1}{3} x^3\right]_{x=1}^2 = \tfrac{1}{10} + \left(-2 + \tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{67}{120}\,.
\end{aligned}$$





Aufgabe 5

Seien $R \geqslant r \geqslant 0$. Geometrische Überlegungen führen auf

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\right\} \\
&= \left\{(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) \mid r \leqslant \varrho \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \tfrac{\pi}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Nun seien $R \geqslant 0$ und $a > 0$. Die Bedingung $x \geqslant 0$ bedeutet $\cos\varphi \geqslant 0$, also $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ oder $\varphi \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$. Zusätzlich muss wegen $y \geqslant ax$ die Ungleichung $\sin\varphi \geqslant a\cos\varphi$ gelten. Diese ist für kein $\varphi \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ erfüllt. Auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $\sin\varphi \geqslant a\cos\varphi$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ mit $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \geqslant a$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $\varphi \geqslant \arctan a \in (0, \frac{\pi}{2})$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
B &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant ax\right\} \\
&= \left\{(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) \mid 0 \leqslant \varrho \leqslant R,\ \arctan a \leqslant \varphi \leqslant \tfrac{\pi}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt

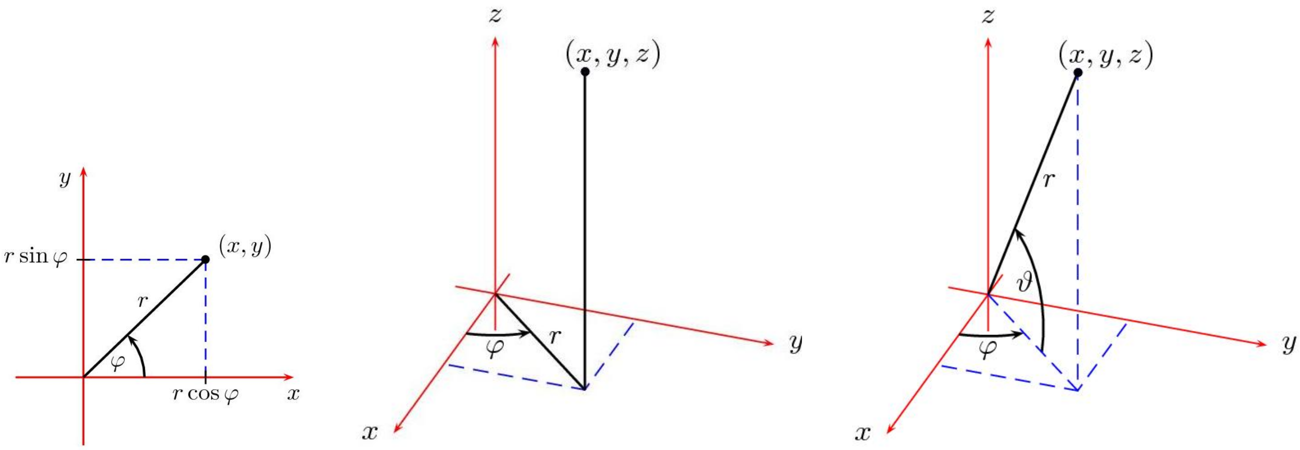
$$\begin{aligned}
C &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2,\ x < 0,\ y \geqslant 0,\ z \leqslant 0\right\} \\
&= \left\{\left(r\cos\varphi\,\cos\vartheta,\ r\sin\varphi\,\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta\right) \mid r \in (1, \sqrt{2}],\ \varphi \in (\tfrac{\pi}{2}, \pi],\ \vartheta \in [-\tfrac{\pi}{2}, 0]\right\}, \\
D &= \left\{\left(r\cos\varphi\,\cos\vartheta,\ r\sin\varphi\,\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta\right) \mid r \in [0, \infty),\ \varphi \in [0, 2\pi),\ \vartheta = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\alpha}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Wiederholung:

Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$*:* Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ setze $r := \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Dann findet man Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$*:* Hier ist $[0,\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(r,\varphi,z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$, also $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und $z = z$.

Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$*:* $[0,\infty) \times [0,2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$, $(r,\varphi,\vartheta) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}$, also $x = r\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = r\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = r\sin\vartheta$.



Aufgabe 6

a) Die Funktionen sind stetig differenzierbar und auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, gilt: Es handelt sich genau dann um ein Potentialfeld, wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist. Im $\mathbb{R}^3$ ist dies äquivalent dazu, dass die Rotation verschwindet. (vgl. Satz 4 in 38.3) Schreibe $\vec{v} =: (v_1, v_2, v_3)$. Wegen

$$D_2 v_3(x,y,z) = 2y + 3z^2x^2 , \qquad D_3 v_2(x,y,z) = 3z^2x^2 \neq D_2 v_3(x,y,z)$$

ist $\nabla \times \vec{v} \neq \vec{0}$. Also ist $\vec{v}$ kein Potentialfeld, d.h. es gibt kein C^1-Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \nabla f$.

Für $\vec{w} =: (w_1, w_2, w_3)$ hingegen gilt

$$D_2 w_3 = e^z = D_3 w_2 , \qquad D_3 w_1 = 2z = D_1 w_3 , \qquad D_1 w_2 = 0 = D_2 w_1 .$$

Somit ist $\vec{w}$ ein Potentialfeld, besitzt also ein Potential $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Für dieses Potential muss $\partial_x f(x,y,z) = z^2$ gelten. Integrieren bezüglich x liefert:

$$f(x,y,z) = z^2x + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion $c : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (Die „Integrationskonstante“ kann also noch von y und z abhängen.) Es folgt $\partial_y f(x,y,z) = \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= e^z$ sein. Daher haben wir $c(y,z) = ye^z + d(z)$ mit einer gewissen Funktion $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wissen also

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z + d(z) ,$$

und hieraus folgt $\partial_z f(x,y,z) = 2zx + ye^z + d'(z)$. Damit dies gleich der dritten Komponente von $\vec{w}$ wird, muss $d' = 0$ gelten. Wir wählen $d = 0$ und haben ein Potential von $\vec{w}$:

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z .$$

b) Bei $\vec{v}$ rechnen wir das Kurvenintegral anhand der Definition aus:

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}\big(\vec{\gamma}(t)\big) \cdot \vec{\gamma}\,'(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \big[-\tfrac{1}{3}t^3 + t^2\big]_0^1 = \tfrac{2}{3}\,.$$

Bei $\vec{w}$ dagegen können wir auf das oben bestimmte Potential f zurückgreifen:

$$\int_{\vec{\gamma}} \vec{w} \cdot d\vec{s} = f\big(\vec{\gamma}(1)\big) - f\big(\vec{\gamma}(0)\big) = f(0,1,0) - f(1,0,0) = 1 - 0 = 1\,.$$