Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2010
Institut für Analysis 10.06.2010
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

9. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Finden Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion

$$\vec{v}\colon \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z > 0\big\} \to \mathbb{R}^3, \quad \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x + ay - 3z \\ x + 2y + bz \\ cx + y + 4z \end{pmatrix}$$

ein Potentialfeld ist, und berechnen Sie ein zugehöriges Potential.

b) Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x,y) \mapsto \begin{pmatrix} (1+2xy)g(xy) \\ 2x^2 g(xy) + 1 \end{pmatrix},$$

wobei $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion ist.

Bestimmen Sie g so, dass $\vec{v}$ ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ ist und $g(0) = 2$ gilt, und ermitteln Sie für dieses g ein Potential von $\vec{v}$.

Aufgabe 2

Es sei γ der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Das Vektorfeld $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + xy \\ x^2 y - y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s}$ zunächst direkt und anschließend mit dem Gaußschen Integralsatz.

Aufgabe 3

Berechnen Sie unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes

$$\iint_G (x^2 + y)\, d(x,y), \qquad \text{wobei } G := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\big\}.$$

Aufgabe 4

Es seien $\alpha, \beta \in [0, 2\pi]$ mit $\alpha < \beta$ und $r\colon [\alpha, \beta] \to (0, \infty)$ eine stetig differenzierbare Funktion. Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt der Menge

$$G = \big\{(r\cos t, r\sin t) \mid \alpha < t < \beta,\ 0 < r < r(t)\big\}$$

gilt:

$$I(G) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(t)\, dt \qquad \textit{(Leibnizsche Sektorformel).}$$

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Sei $G = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^2 < 3x^2 + 4y^2\right\}$ und γ der positiv orientierte Rand von G.

a) Bestimmen Sie eine Parametrisierung von γ mittels Polarkoordinaten.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt von G. (*Hinweis*: Leibnizsche Sektorformel)

Aufgabe 6

Die Fläche $\mathcal{F}$ ist gegeben durch die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u+v \\ u-v \\ 2uv \end{pmatrix} \quad (u, v \in \mathbb{R})\,.$$

Weiter sei $Z := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt des Teils von $\mathcal{F}$, der innerhalb des Zylinders Z liegt.

Die **Prüfungen** zu HM II und KAI finden am **Montag, den 20.09.2010,** statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss**: Freitag, der 16.07.2010.
Weitere Informationen zu den Prüfungen entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage

www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etechphys2010s/.