Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2010
Institut für Analysis 17.06.2010
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Für das elektrostatische Potential $U(\vec{a})$ einer mit der Dichte ϱ homogen geladenen Fläche $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ im Punkt $\vec{a} \notin \mathcal{F}$ gilt nach Coulomb

$$U(\vec{a}) = \varrho \iint_{\mathcal{F}} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{a}\|}\, do\,.$$

Bestimmen Sie $U(\vec{a})$ in $\vec{a} = (0,0,1)$, falls $\mathcal{F}$ der durch $0 \le z \le 1$ beschränkte Teil des Kegelmantels $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2\}$ ist.

Hinweis: Es gilt $\int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r^2-2r+1}}\, dr = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\ln(\sqrt{2}-1)$.

Aufgabe 2

Sei $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leqslant 3\}$ und $\vec{w}$ eine positiv orientierte Parametrisierung von ∂U. Für $(u,v) \in U$ definiere $\vec{r}(u,v) = (u, v, v^2 - u^2)$ und betrachte die Fläche

$$\mathcal{F} = \left\{\vec{r}(u,v) \mid (u,v) \in U\right\},$$

deren Rand $\partial\mathcal{F} = \vec{r}(\partial U)$ durch $\vec{r} \circ \vec{w}$ parametrisiert sei. Berechnen Sie für das Vektorfeld

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} z - 5y \\ 9x - 3z \\ y - 2x \end{pmatrix}$$

das Kurvenintegral $\displaystyle\oint_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s}$ unter Verwendung des Stokesschen Integralsatzes.

Aufgabe 3

Die Oberfläche von $Z := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 1\right\}$ wird mit $\mathcal{F}$ bezeichnet und es sei

$$\vec{v}(x,y,z) := \begin{pmatrix} x^3 \\ x^2 y \\ x^2 z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$\iint_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do\,,$$

wobei $\vec{N}$ der Normaleneinheitsvektor ist, der ins Äußere des Zylinders Z weist, auf zwei verschiedene Arten, nämlich

a) mittels der Definition des Oberflächenintegrals;

b) unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes.

— bitte wenden —

Aufgabe 4

Gegeben seien der Kegel $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant 2 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ sowie das Vektorfeld $\vec{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{f}(x,y,z) = (z, y, z+1)$. Berechnen Sie den Fluß des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch die Oberfläche des Kegels K nach außen.

Aufgabe 5

a) Berechnen Sie das Volumen der Menge

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\,,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 - y^2\right\}.$$

b) Die beschränkte Menge $B \subset \mathbb{R}^3$ sei durch die Ebenen $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ und $x + y + 2z = 1$ begrenzt. Berechnen Sie das Integral $\iiint\limits_B \sin z \, d(x,y,z)$.

Aufgabe 6

a) Sei $0 < r < R$. Berechnen Sie das Integral

$$\iint\limits_B \frac{y}{x}\, d(x,y)\,, \qquad B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \in [r,R],\ |y| \leqslant x\right\}.$$

b) Berechnen Sie für die Menge

$$B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leqslant z \leqslant 1\,, x^2+y^2 \leqslant (1-z)^2\right\}$$

das Integral

$$\iiint\limits_B (x^2+y^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, d(x,y,z)\,.$$

c) Sei $B := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \|(x,y,z)\| \leqslant 2\}$. Eine kugelförmige Gasansammlung besitze die Massendichte

$$\varrho(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2+y^2+z^2} & \text{für } 0 \leqslant \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leqslant 1\,, \\ 0 & \text{für } 1 < \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leqslant 2\,. \end{cases}$$

Berechnen Sie die gesamte Masse $\iiint\limits_B \varrho(x,y,z)\, d(x,y,z)$.

Übungsklausur Zur Teilnahme an der Übungsklausur am Samstag, den 03.07.2010, von 08:00 bis 10:00 Uhr ist keine Anmeldung erforderlich. Hörsaalverteilung der Übungsklausur:

Fachrichtung	Anfangsbuchstabe Nachname	Hörsaal
ETEC/Geodäsie	A-J	Benz-Hörsaal
ETEC/Geodäsie	K-Z	Daimler-Hörsaal
Physik/Chemie	A-Z	Gerthsen-Hörsaal

Weitere Informationen zur Übungsklausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage.