Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2010
24.06.2010

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

11. Übungsblatt

Aufgabe 1

In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ differenzierbar, wo sind sie holomorph? Bestimmen Sie gegebenenfalls f'.

a) $f(z) = \begin{cases} e^{-1/z^4} & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0 \end{cases}$

b) $f(x+iy) = \sin x \, \sin y - i \cos x \, \cos y \quad (x, y \in \mathbb{R})$

c) $f(z) = z \operatorname{Re} z$

d) $f(z) = \dfrac{z}{\overline{z}} + \dfrac{\overline{z}}{z} \quad (\text{für } z \neq 0)$

Aufgabe 2

Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$u(x, y) = x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2 \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

der Realteil einer holomorphen Funktion? Bestimmen Sie für dieses λ sämtliche holomorphen Funktionen, die u als Realteil haben.

Aufgabe 3

Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, die durch

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

gegeben ist, heißt *Joukowski-Abbildung*.

a) Für welche $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist $f(z)$ reell?

b) Zeigen Sie, dass f in $G = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z < 0\}$ injektiv ist. Ist f auch schlicht in G?

c) Es sei $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + \frac{1}{5} - \frac{i}{2}| = \frac{13}{10}\}$. Fertigen Sie (z.B. mittels eines Computerprogramms) eine Skizze der Bildmenge von M unter f an (*Joukowski-Tragflügelprofil*).

Aufgabe 4

a) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine schlichte Funktion. Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt von $f(G)$ gilt

$$I(f(G)) = \iint_G |f'(x + iy)|^2 \, d(x, y)\,.$$

b) Zeigen Sie, dass die durch $f(z) = z^2 + 2z$ gegebene Funktion f auf der Kreisscheibe $G = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1/2\}$ schlicht ist, und berechnen Sie den Flächeninhalt von $f(G)$.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Es sei $G = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < e,\ \frac{1}{4}\pi < \arg z < \frac{3}{4}\pi \right\}$.

a) Begründen Sie, dass das Gebiet G durch eine Logarithmusfunktion schlicht abgebildet werden kann.

b) Bestimmen Sie einen Zweig des Logarithmus, für den $\log(i) = \frac{5}{2}\pi i$ gilt, und geben Sie das Bild von G unter dieser Abbildung an.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt von G unter Verwendung von Aufgabe **4 a)**.

Aufgabe 6

a) Berechnen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$(1+i)^i\,, \qquad i^{(i^i)}\,, \qquad (\log i)^i\,.$$

Hierbei bezeichnet $\log z$ den Hauptzweig des Logarithmus. Ausdrücke der Form z^α sind mit dem Hauptzweig des Logarithmus definiert.

b) Ermitteln Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $e^{1/z} = i$.

Aufgabe 7

Betrachten Sie die durch $f(z) = \sin z$ gegebene Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

a) Worauf bildet die Funktion f Geraden ab, die in der komplexen Zahlenebene parallel zu den Achsen liegen?

Hinweis: Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\sin(x+iy) = \sin x\, \cosh y + i \cos x\, \sinh y$.

b) Für welche $z_0 \in \mathbb{C}$ gilt $f'(z_0) \neq 0$?

Es sei z_0 ein solcher Punkt. g sei die Parallele zur reellen Achse durch z_0 und h sei die Parallele zur imaginären Achse durch z_0. Somit schneiden sich die Geraden g und h in z_0 im rechten Winkel. Zeigen Sie, dass sich auch die Bilder dieser Geraden im Punkt $f(z_0)$ im rechten Winkel schneiden.

Übungsklausur Zur Teilnahme an der Übungsklausur am Samstag, den 03.07.2010, von 08:00 bis 10:00 Uhr ist keine Anmeldung erforderlich. Hörsaalverteilung der Übungsklausur:

Fachrichtung	Anfangsbuchstabe Nachname	Hörsaal
ETEC/Geodäsie	A-J	Benz-Hörsaal
ETEC/Geodäsie	K-Z	Daimler-Hörsaal
Physik/Chemie	A-Z	Gerthsen-Hörsaal

Weitere Informationen zur Übungsklausur finden Sie auf der Vorlesungshomepage.