Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2010
01.07.2010

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

12. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie jeweils für die Funktion f und die Kurve γ das Kurvenintegral $\int_\gamma f(\zeta)\, d\zeta$.

a) $f(\zeta) = \overline{\zeta}\zeta^2\,, \quad \gamma$: geradlinige Verbindung von -1 nach i

b) $f(\zeta) = |\zeta|^2\,, \quad \gamma$: positiv orientierter Rand von $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z \in (0,1)\}$

Aufgabe 2

Berechnen Sie den Wert der folgenden Kurvenintegrale.

a) $\displaystyle\oint_{|\zeta|=2} \frac{\zeta^3}{\zeta^2+1}\, d\zeta$

b) $\displaystyle\oint_{|\zeta|=1} \frac{e^\zeta}{\zeta^2+2\zeta}\, d\zeta$

c) $\displaystyle\oint_{|\zeta|=4} \frac{\zeta e^{i\zeta}}{(\zeta-\pi)^3}\, d\zeta$

d) $\displaystyle\oint_{|\zeta-2|=3} \frac{e^{i\cos\zeta}\sin(\zeta^4+1)-\zeta}{(\zeta-7)^{42}}\, d\zeta$

Hinweis: Es gilt $\frac{1}{\zeta^2+1} = \frac{i/2}{\zeta+i} - \frac{i/2}{\zeta-i}$ für $\zeta \notin \{-i, i\}$ und $\frac{1}{\zeta^2+2\zeta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\zeta} - \frac{1}{\zeta+2}\right)$ für $\zeta \notin \{-2, 0\}$.

Aufgabe 3

Die Funktion f ist gegeben durch

$$f(z) = \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z}\,.$$

Bestimmen Sie die Laurent-Entwicklung von f

a) im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < 3\}$.

b) um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$, die im Punkt $1+3i$ konvergiert.

Aufgabe 4

Bestimmen Sie die isolierten Singularitäten von f sowie die Residuen in diesen Punkten.

a) $\displaystyle f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^4}$

b) $f(z) = z e^{\frac{1}{1-z}}$

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe des Residuensatzes.

a) $\displaystyle\oint_{|\zeta|=2} \frac{e^{\zeta}}{(\zeta-1)(\zeta+3)^2}\,d\zeta$ **b)** $\displaystyle\oint_{|\zeta|=9} \frac{e^{\zeta}}{(\zeta-1)(\zeta+3)^2}\,d\zeta$

c) $\displaystyle\oint_{|\zeta|=1} \frac{\zeta}{e^{i\zeta}-1}\,d\zeta$ **d)** $\displaystyle\oint_{|\zeta|=2} \exp\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right)d\zeta$

e) $\displaystyle\oint_{\partial G} \frac{2\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+2)(\zeta+i)}\,d\zeta\,,$ wobei $G := \{z \in \mathbb{C} \mid -3 < \operatorname{Re} z < 2,\ -2 < \operatorname{Im} z < 3\}$

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, ob sich die durch $f(z) = e^{\sin z}$ definierte Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt und für welche z diese gegebenenfalls konvergiert. Berechnen Sie dann

$$\oint_{|\zeta|=1/2} \zeta\, e^{\sin(1/\zeta)}\,d\zeta\,.$$

Aufgabe 7

Es sei $R > 0$. Die Kurven γ_1, γ_2, γ_3 seien gegeben durch die Parametrisierungen

$$\zeta_1(t) = t\,, \qquad \zeta_2(t) = R + it\,, \qquad \zeta_3(t) = t(1+i)\,, \qquad \text{jeweils mit } 0 \leqslant t \leqslant R\,.$$

a) Beweisen Sie die Gleichung

$$\int_{\gamma_3} e^{-\zeta^2}\,d\zeta = \int_{\gamma_1} e^{-\zeta^2}\,d\zeta + \int_{\gamma_2} e^{-\zeta^2}\,d\zeta\,.$$

b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzungen

$$\int_{\gamma_2} e^{-\zeta^2}\,d\zeta \xrightarrow{R\to\infty} 0\,.$$

c) Berechnen Sie nun den Wert der so genannten *Fresnelschen Integrale*

$$\int_0^{\infty} \sin(x^2)\,dx \qquad \text{und} \qquad \int_0^{\infty} \cos(x^2)\,dx\,,$$

indem Sie den Grenzübergang $R \to \infty$ betrachten und $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ verwenden.

Aufgabe 8

Berechnen Sie den Wert des reellen Integrals

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{5 - 4\cos t}\,dt\,.$$

Die **Prüfungen** zu HM II und KAI finden am **Montag, den 20.09.2010,** statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss**: Freitag, der 16.07.2010.
Weitere Informationen zu den Prüfungen entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage
www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etechphys2010s/.