Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2010

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Eine Parametrisierung von γ ist $\zeta(t) := -1 + t(1+i) = (t-1) + it$, wobei $t \in [0,1]$. Es gilt $\zeta'(t) = 1+i$ und wegen $f(\zeta) = \zeta|\zeta|^2$ ist für jedes $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} f(\zeta(t)) &= \big((t-1)+it\big)\big|(t-1)+it\big|^2 = \big((t-1)+it\big)\big((t-1)^2+t^2\big) \\ &= (t-1)^3 + (t-1)t^2 + i\big(t(t-1)^2+t^3\big) = (2t^3-4t^2+3t-1) + i(2t^3-2t^2+t)\,. \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich gemäß Definition des Kurvenintegrals

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta &= \int_0^1 f(\zeta(t))\zeta'(t)\,dt = \int_0^1 \big((2t^3-4t^2+3t-1)+i(2t^3-2t^2+t)\big)(1+i)\,dt \\ &= (1+i)\left(\frac{2}{4}-\frac{4}{3}+\frac{3}{2}-1\right) + i(1+i)\left(\frac{2}{4}-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\right) = -\frac{1+i}{3} + \frac{i-1}{3} = -\frac{2}{3}\,. \end{aligned}$$

b) Die Kurve γ ist der Rand des Quadrates mit den Ecken 0, 1, $1+i$ und i, besteht also aus den vier Strecken

$$\gamma_1 : \zeta_1(t) = t\,, \quad \gamma_2 : \zeta_2(t) = 1+it\,, \quad \gamma_3 : \zeta_3(t) = 1-t+i\,, \quad \gamma_4 : \zeta_4(t) = i(1-t)\,,$$

wobei jeweils $t \in [0,1]$. Man erhält

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(\zeta)\,d\zeta &= \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} f(\zeta)\,d\zeta = \sum_{k=1}^4 \int_0^1 f(\zeta_k(t))\zeta_k'(t)\,dt = \sum_{k=1}^4 \int_0^1 |\zeta_k(t)|^2\zeta_k'(t)\,dt \\ &= \int_0^1 t^2\,dt + \int_0^1 (1+t^2)i\,dt + \int_0^1 \big((1-t)^2+1\big)(-1)\,dt + \int_0^1 (1-t)^2(-i)\,dt \\ &= \int_0^1 \Big(t^2-(1-t)^2-1+i\big(1+t^2-(1-t)^2\big)\Big)\,dt \\ &= \int_0^1 (2t-2+2it)\,dt = -1+i\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Wir verwenden bei diesem Integranden die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{\zeta^2+1} = \frac{1}{(\zeta+i)(\zeta-i)} = \frac{i/2}{\zeta+i} - \frac{i/2}{\zeta-i}\,.$$

Da die Punkte $-i$ und i im Inneren der Kreislinie $|\zeta| = 2$ liegen und die Funktion $\zeta \mapsto i\zeta^3/2$ im Gebiet $G = \mathbb{C}$ holomorph ist, ergibt sich mit der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned} \oint_{|\zeta|=2} \frac{\zeta^3}{\zeta^2+1}\,d\zeta &= \oint_{|\zeta|=2} \frac{i\zeta^3/2}{\zeta-(-i)}\,d\zeta - \oint_{|\zeta|=2} \frac{i\zeta^3/2}{\zeta-i}\,d\zeta \\ &= 2\pi i\,\frac{i\zeta^3}{2}\Big|_{\zeta=-i} - 2\pi i\,\frac{i\zeta^3}{2}\Big|_{\zeta=i} = -\pi(-i)^3 + \pi i^3 = -2\pi i\,. \end{aligned}$$

b) Der Integrand lässt sich hier wie folgt umschreiben

$$\frac{e^\zeta}{\zeta^2+2\zeta} = \frac{e^\zeta}{\zeta(\zeta+2)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{e^\zeta}{\zeta} - \frac{e^\zeta}{\zeta+2}\Big).$$

Der Punkt 0 liegt im Inneren des Integrationsweges, der Punkt -2 dagegen im Äußeren. Folglich liefern die Cauchysche Integralformel und der Cauchysche Integralsatz

$$\oint_{|\zeta|=1} \frac{e^\zeta}{\zeta^2+2\zeta}\,d\zeta = \frac{1}{2}\bigg(\oint_{|\zeta|=1} \frac{e^\zeta}{\zeta-0}\,d\zeta - \oint_{|\zeta|=1} \frac{e^\zeta}{\zeta+2}\,d\zeta\bigg) = \frac{1}{2}\Big(2\pi i\, e^\zeta\big|_{\zeta=0} - 0\Big) = \pi i\,.$$

c) Für die durch $f(\zeta) := \zeta e^{i\zeta}$ definierte, in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f gilt

$$f'(\zeta) = e^{i\zeta} + \zeta(ie^{i\zeta}) = (1+i\zeta)e^{i\zeta}\,, \qquad f''(\zeta) = ie^{i\zeta} + (1+i\zeta)(ie^{i\zeta}) = (2i-\zeta)e^{i\zeta}\,,$$

und wegen $|\pi| < 4$ erhalten wir mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen

$$\oint_{|\zeta|=4} \frac{\zeta e^{i\zeta}}{(\zeta-\pi)^3}\,d\zeta = 2\pi i\,\frac{f''(\pi)}{2!} = \pi i\,(2i-\zeta)e^{i\zeta}\big|_{\zeta=\pi} = \pi i\,(2i-\pi)(-1) = 2\pi + i\pi^2\,.$$

d) Die Nullstelle $\zeta_0 = 7$ des Nenners des Integranden liegt außerhalb der Kreislinie $|\zeta-2| = 3$, denn $|7-2| = 5 > 3$. Der Integrand ist also holomorph in dem konvexen und damit einfach zusammenhängenden Gebiet $G := \{\,\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta-2| < 5\,\}$, in welchem auch der glatte, geschlossene Integrationsweg verläuft. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt somit

$$\oint_{|\zeta-2|=3} \frac{e^{i\cos\zeta}\sin(\zeta^4+1)-\zeta}{(\zeta-7)^{42}}\,d\zeta = 0\,.$$

Aufgabe 3

Vorüberlegung: Will man

$$\frac{1}{z-a}$$

um den Punkt $z_0 \neq a$ in eine Laurent-Reihe entwickeln, so gibt es dafür zwei Möglichkeiten. Für $|z-z_0| < |a-z_0|$ hat man die Potenzreihen-Entwicklung

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-a} &= \frac{1}{(z-z_0)+(z_0-a)} = \frac{1}{z_0-a}\cdot\frac{1}{\frac{z-z_0}{z_0-a}+1} = \frac{1}{z_0-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{a-z_0}} \\ &= \frac{1}{z_0-a}\sum_{k=0}^\infty \Big(\frac{z-z_0}{a-z_0}\Big)^k = -\sum_{k=0}^\infty \frac{(z-z_0)^k}{(a-z_0)^{k+1}}\,.\end{aligned} \tag{$*$}$$

Für $|z-z_0| > |a-z_0|$ dagegen ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-a} &= \frac{1}{(z-z_0)+(z_0-a)} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1+\frac{z_0-a}{z-z_0}} = \frac{1}{z-z_0}\cdot\frac{1}{1-\frac{a-z_0}{z-z_0}} \\ &= \frac{1}{z-z_0}\sum_{k=0}^\infty \Big(\frac{a-z_0}{z-z_0}\Big)^k = \sum_{k=0}^\infty \frac{(a-z_0)^k}{(z-z_0)^{k+1}}\,.\end{aligned} \tag{$**$}$$

a) Für $1 < |z| < 3$ gilt

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{1-z^2} + \frac{1}{3-z} = \frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{z^{-2}-1} - \frac{1}{z-3} = -\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-z^{-2}} - \frac{1}{z-3} \\ &= -\frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^\infty (z^{-2})^k - \frac{1}{z-3} = -\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{z^{2k+2}} - \frac{1}{z-3} \overset{(*)}{=} -\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{z^{2(k+1)}} + \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{3^{k+1}}\,.\end{aligned}$$

b) Die Partialbruchzerlegung des ersten Summanden von $f(z)$ liefert die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1}\right) - \frac{1}{z-3}\,.$$

Die Funktion f hat Polstellen in -1, in 1 und in 3. Da die beiden Punkte -1 und 3 von $z_0 = 1$ den Abstand 2 haben, kommen als Gebiete für die Laurent-Entwicklung um $z_0 = 1$ nur die beiden Kreisringe

$$0 < |z-1| < 2 \qquad \text{und} \qquad 2 < |z-1| < \infty$$

in Frage. Da der Punkt $1+3i$ im Konvergenzgebiet liegen soll und von z_0 den Abstand $|1+3i-1| = 3$ hat, ist der zweite Kreisring der richtige. Dort gilt gemäß $(**)$

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1-1)^k}{(z-1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{(z-1)^{k+1}}\,, \qquad \frac{1}{z-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3-1)^k}{(z-1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(z-1)^{k+1}}\,.$$

Also ergibt sich für $|z-1| > 2$

$$f(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{(z-1)^{k+1}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(z-1)^{k+1}} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(-2)^k - 2^k}{(z-1)^{k+1}}\,.$$

Aufgabe 4

a) Die Funktion $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^4}$ hat in $z_0 = 1$ einen Pol der Ordnung 4. Mit Hilfe der Formel aus Satz 1 in 7.1 sieht man

$$\operatorname{Res}(f;1) = \frac{1}{(4-1)!}\left(D^{4-1}\Big((z-1)^4 f(z)\Big)\right)\Big|_{z=1} = \frac{1}{6}\left(D^3\, e^z\right)\Big|_{z=1} = \frac{1}{6}\, e^z\Big|_{z=1} = \frac{e}{6}\,.$$

b) Da f in $z_0 = 1$ eine wesentliche Singularität besitzt, können wir nicht wie zuvor vorgehen. Wir bestimmen stattdessen die zugehörige Laurentreihe um 1 und lesen das Residuum ab

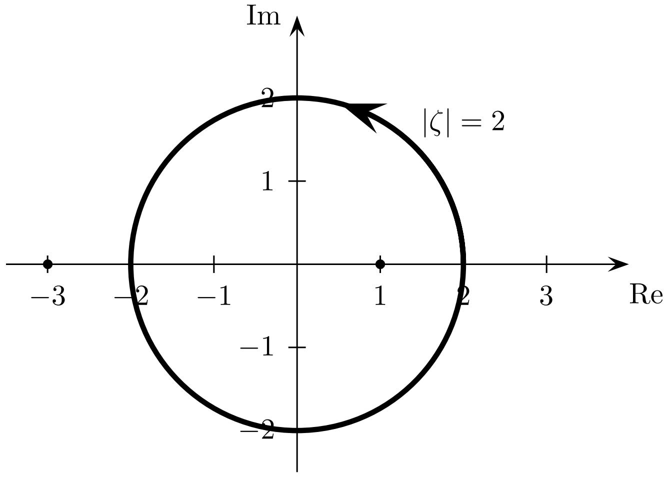
$$\begin{aligned}
f(z) = z e^{\frac{1}{1-z}} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{1-z}\right)^n &= \big((z-1)+1\big) \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-k)!}\,(z-1)^k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-k)!}\,(z-1)^{k+1} + \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-k)!}\,(z-1)^k \\
&= \sum_{l=-\infty}^{1} \frac{(-1)^{l-1}}{(-(l-1))!}\,(z-1)^l + \sum_{k=-\infty}^{0} \frac{(-1)^k}{(-k)!}\,(z-1)^k \\
&= (z-1) + \sum_{k=-\infty}^{0} \left(\frac{(-1)^{k-1}}{(-(k-1))!} + \frac{(-1)^k}{(-k)!}\right)(z-1)^k\,, \qquad z \neq 1\,.
\end{aligned}$$

Das Residuum von f in 1 ist der Koeffizient von $(z-1)^{-1}$, also

$$\operatorname{Res}(f;1) = \frac{(-1)^{-2}}{2!} + \frac{-1}{1!} = -\frac{1}{2}\,.$$

Aufgabe 5

a) Der Integrand $f(\zeta) := \frac{e^\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+3)^2}$ besitzt in 1 eine einfache und in -3 eine doppelte Polstelle und ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{1, -3\}$.



Da innerhalb des Integrationsweges $|\zeta| = 2$ nur die Polstelle 1 liegt, liefert der Residuensatz

$$\oint_{|\zeta|=2} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 1) = \frac{\mathrm{e}\pi i}{8},$$

denn für das Residuum von f in 1 gilt

$$\operatorname{Res}(f; 1) = (\zeta - 1) f(\zeta)\Big|_{\zeta=1} = \frac{e^\zeta}{(\zeta+3)^2}\Big|_{\zeta=1} = \frac{e}{16}.$$

b) Nun liegen die beiden Polstellen -3 und 1 von f innerhalb des Integrationsweges $|\zeta| = 9$. Deswegen gilt nach dem Residuensatz

$$\oint_{|\zeta|=9} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \Big(\operatorname{Res}(f; 1) + \operatorname{Res}(f; -3)\Big) = 2\pi i \Big(\frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16}\Big) = \frac{(e - 5e^{-3})\pi i}{8},$$

da

$$\operatorname{Res}(f; -3) = \left(D\left((\zeta+3)^2 f(\zeta)\right)\right)\Big|_{\zeta=-3} = \left(D\,\frac{e^\zeta}{\zeta - 1}\right)\Big|_{\zeta=-3} = \left(\frac{e^\zeta(\zeta-1) - e^\zeta}{(\zeta-1)^2}\right)\Big|_{\zeta=-3}$$
$$= \frac{-5e^{-3}}{16}.$$

c) Schreibe $f(\zeta) := \frac{\zeta}{e^{i\zeta}-1}$. Der Nenner von $f(\zeta)$ wird genau dann 0, wenn $\zeta = 2k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Von diesen Punkten liegt nur $\zeta = 0$ im Inneren des Kreises $|\zeta| = 1$. Daher ist

$$\oint_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 0).$$

Nun sieht man anhand der Darstellung

$$f(\zeta) = \frac{\zeta}{e^{i\zeta} - 1} = \frac{\zeta}{\left(1 + i\zeta + \frac{1}{2}(i\zeta)^2 + \cdots\right) - 1} = \frac{\zeta}{i\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 + \cdots} = \frac{1}{i - \frac{1}{2}\zeta + \cdots},$$

dass in $\zeta = 0$ eine hebbare Singularität von f vorliegt. Deshalb gilt $\operatorname{Res}(f; 0) = 0$ und das Integral hat den Wert 0.

d) Sei $f(\zeta) := e^{\frac{\zeta}{1-\zeta}}$. Hier liefert der Residuensatz

$$\oint_{|\zeta|=2} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \operatorname{Res}(f;1)\,.$$

Um das Residuum $\operatorname{Res}(f;1)$ zu berechnen, betrachten wir die Laurententwicklung von f um 1

$$f(\zeta) = \exp\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right) = \exp\left(-1 + \frac{1}{1-\zeta}\right) = e^{-1}e^{-1/(\zeta-1)} = e^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}(\zeta-1)^{-k}\,;$$

der Koeffizient von $(\zeta-1)^{-1}$ lautet $-e^{-1}$. Also ist $\operatorname{Res}(f;1) = -e^{-1}$ und damit

$$\oint_{|\zeta|=2} \exp\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right) d\zeta = -\frac{2\pi i}{e}\,.$$

e) Der Integrand $f(\zeta) := \frac{2\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+2)(\zeta+i)}$ besitzt in $1, -2, -i$ jeweils einen Pol erster Ordnung und ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{1,-2,-i\}$. Da sich alle Polstellen im Inneren von G befinden, ergibt sich nach dem Residuensatz

$$\oint_{\partial G} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \Big(\operatorname{Res}(f;1) + \operatorname{Res}(f;-2) + \operatorname{Res}(f;-i)\Big)\,.$$

Wir berechnen nun die Residuen von f in den (einfachen) Polstellen

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(f;1) &= (\zeta-1)f(\zeta)\Big|_{\zeta=1} = \frac{2\zeta}{(\zeta+2)(\zeta+i)}\Big|_{\zeta=1} = \frac{2}{3(1+i)} = \frac{1}{3}(1-i)\,,\\
\operatorname{Res}(f;-2) &= (\zeta+2)f(\zeta)\Big|_{\zeta=-2} = \frac{2\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+i)}\Big|_{\zeta=-2} = \frac{4}{3(-2+i)} = -\frac{4}{15}(2+i)\,,\\
\operatorname{Res}(f;-i) &= (\zeta+i)f(\zeta)\Big|_{\zeta=-i} = \frac{2\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+2)}\Big|_{\zeta=-i} = \frac{2i}{(i+1)(-i+2)} = \frac{1}{5}(1+3i)\,.
\end{aligned}$$

Hiermit ist

$$\oint_{\partial G} f(\zeta)\, d\zeta = 2\pi i\Big(\frac{1}{3}(1-i) - \frac{4}{15}(2+i) + \frac{1}{5}(1+3i)\Big) = 0\,.$$

Aufgabe 6

Als Hintereinanderausführung holomorpher Funktionen ist die Funktion f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph. Sie lässt sich also um $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, z^n\,.$$

Diese Potenzreihe konvergiert auf der größten Kreisscheibe um $z_0 = 0$, auf der f holomorph ist. Hier konvergiert die Potenzreihe also für jedes $z \in \mathbb{C}$.
Der Integrand $\zeta f(1/\zeta)$ ist holomorph auf $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ und für $\zeta \neq 0$, insbesondere also für $0 < |\zeta| < 1$, gilt nach den obigen Überlegungen

$$\zeta f(1/\zeta) = \zeta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,\zeta^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,\zeta^{1-n}\,.$$

Nach dem Residuensatz gilt dann

$$\oint_{|\zeta|=1/2} \zeta e^{\sin(1/\zeta)}\, d\zeta = \int_{|z|=1/2} \zeta f(1/\zeta)\, d\zeta = 2\pi i \operatorname{Res}(\zeta f(1/\zeta);0)\,,$$

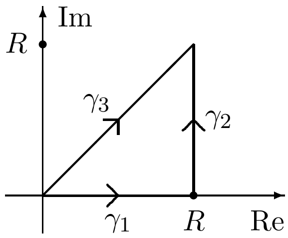
und Ablesen an der Laurentreihe für $\zeta f(1/\zeta)$ ergibt

$$= 2\pi i\,\frac{f''(0)}{2}\,.$$

Wegen $f'(z) = \cos(z)f(z)$, $f''(z) = -\sin(z)f(z) + \cos^2(z)f(z)$ und $f(0) = 1$ ist $f''(0) = 1$. Das Integral ist also gleich

$$2\pi i\,\frac{1}{2} = \pi i\,.$$

Aufgabe 7



a) Im einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathbb{C}$ ist $f(\zeta) := e^{-\zeta^2}$ holomorph, und durch Aneinanderhängen von γ_1, γ_2 und $-\gamma_3$ erhält man eine geschlossene, positiv orientierte Kurve γ. Führen wir die Schreibweise $I(\Gamma) := \int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta$ ein, so liefert der Cauchysche Integralsatz

$$0 = I(\gamma) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2) + I(-\gamma_3) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2) - I(\gamma_3)\,.$$

Damit ergibt sich $I(\gamma_3) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2)$, also die behauptete Gleichung.

b) Es gilt $\zeta_2^2(t) = (R+it)^2 = R^2 + 2iRt - t^2$ und $\zeta_2'(t) = i$. Damit erhalten wir

$$|I(\gamma_2)| = \left|\int_0^R e^{-\zeta_2^2(t)}\zeta_2'(t)\,dt\right| \leqslant \int_0^R \left|e^{-R^2-2iRt+t^2} i\right| dt = \int_0^R e^{t^2-R^2}\,dt\,.$$

Wegen der für alle $t \in [0,R]$ gültigen Abschätzung $t^2 \leqslant Rt$ bekommen wir folglich

$$|I(\gamma_2)| \leqslant \int_0^R e^{Rt-R^2}\,dt = \left[\frac{e^{Rt-R^2}}{R}\right]_{t=0}^R = \frac{1-e^{-R^2}}{R} \xrightarrow{R\to\infty} 0\,,$$

und damit ist $I(\gamma_2) \to 0$ für $R \to \infty$ bewiesen.

Bemerkung: Die Standardabschätzung für Kurvenintegrale hätte hier nicht ausgereicht, denn es gilt $L(\gamma_2) = R$ und $\max\{|f(\zeta)| : \zeta \in \gamma_2\} = 1$.

c) Wir betrachten nun noch $I(\gamma_1)$ und $I(\gamma_3)$. Für das erste Kurvenintegral erhalten wir

$$I(\gamma_1) = \int_0^R e^{-\zeta_1^2(t)}\zeta_1'(t)\,dt = \int_0^R e^{-t^2}\,dt \xrightarrow{R\to\infty} \int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,,$$

und wegen $\zeta_3^2(t) = t^2(1+i)^2 = 2it^2$ und $\zeta_3'(t) = 1+i$ gilt

$$I(\gamma_3) = \int_0^R e^{-\zeta_3^2(t)}\zeta_3'(t)\,dt = \int_0^R e^{-2it^2}(1+i)\,dt \xrightarrow{R\to\infty} (1+i)\int_0^\infty e^{-2it^2}\,dt\,.$$

(Dieses uneigentliche Integral muss wegen der Konvergenz von $I(\gamma_1)$ und $I(\gamma_2)$ sowie der in **a)** bewiesenen Gleichung existieren.) Mit der Substitution $x = \sqrt{2}\,t$ ergibt sich

$$I(\gamma_3) \xrightarrow{R\to\infty} (1+i)\int_0^\infty e^{-ix^2}\,\frac{dx}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \left[\cos(x^2) - i\sin(x^2)\right]dx\,.$$

Beim Grenzübergang $R \to \infty$ folgt also mit **b)** aus der in **a)** bewiesenen Gleichung

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^\infty \left[\cos(x^2) - i\sin(x^2)\right]dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0\,.$$

Für die beiden Integrale $C := \int_0^\infty \cos(x^2)\,dx$ und $S := \int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$ hat man somit

$$(1+i)(C-iS) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,, \qquad \text{d.h.} \qquad (C+S) + i(C-S) = \tfrac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,.$$

Hieraus folgen die Gleichungen $C + S = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$ und $C - S = 0$, also ist $C = S = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$.

Aufgabe 8

Das zu berechnende Integral ist von der Form

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt\,, \qquad \text{mit} \quad R(x,y) := \frac{y}{5-4y}\,.$$

Ein solches Integral lässt sich als Kurvenintegral schreiben: Laut Satz 3 in 7.2 gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt = \oint_{|z|=1} f(z)\, dz\,, \qquad \text{wobei} \quad f(z) := \frac{1}{iz} R\left(\frac{z^2-1}{2iz}, \frac{z^2+1}{2z}\right).$$

Der Integrand des Kurvenintegrals ist

$$f(z) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{\frac{z^2+1}{2z}}{5 - 4\frac{z^2+1}{2z}} = \frac{1}{iz} \cdot \frac{z^2+1}{10z - 4(z^2+1)} = \frac{z^2+1}{-i(4z^3 - 10z^2 + 4z)}\,.$$

Diese Funktion f hat die Nullstellen des Nenners als isolierte Singularitäten: Wegen

$$4z^3 - 10z^2 + 4z = 4z(z^2 - \tfrac{5}{2}z + 1) = 4z(z-2)(z-\tfrac{1}{2})$$

sind dies $z_0 = 0$, $z_1 = 2$ und $z_2 = \frac{1}{2}$. Da der Punkt $z_1 = 2$ außerhalb des von der Integrationskurve umschlossenen Gebietes $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ liegt, die Punkte $z_0 = 0$ und $z_2 = \frac{1}{2}$ aber innerhalb, liefert der Residuensatz

$$\oint_{|z|=1} f(z)\, dz = 2\pi i \big(\operatorname{Res}(f;0) + \operatorname{Res}(f;\tfrac{1}{2})\big)\,.$$

In $z_0 = 0$ und $z_2 = \frac{1}{2}$ hat der Nenner von $f(z)$ einfache Nullstellen, der Zähler ist $\neq 0$. Somit sind 0 und $\frac{1}{2}$ Polstellen erster Ordnung und für die Residuen erhält man nach Satz 2 in 7.1

$$\operatorname{Res}(f;0) = \frac{z^2+1}{-i(4z^3 - 10z^2 + 4z)'}\Big|_{z=0} = \frac{z^2+1}{-i(12z^2 - 20z + 4)}\Big|_{z=0} = -\frac{1}{4i}\,,$$

$$\operatorname{Res}(f;\tfrac{1}{2}) = \frac{z^2+1}{-i(12z^2 - 20z + 4)}\Big|_{z=1/2} = \frac{\frac{1}{4}+1}{-i(3 - 10 + 4)} = \frac{\frac{5}{4}}{3i} = \frac{5}{12i}\,.$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{5 - 4\cos t}\, dt = 2\pi i \left(-\frac{1}{4i} + \frac{5}{12i}\right) = 2\pi i\, \frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3}\,.$$