Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2010
08.07.2010

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

13. Übungsblatt

Aufgabe 1

Berechnen Sie jeweils die Laplacetransformierte der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, die auf $(-\infty, 0)$ durch 0 und auf $[0,\infty)$ wie folgt definiert ist.

a) $f(t) = e^{at}(t^2 + bt + c) \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$ **b)** $f(t) = \cos(\omega t) \quad (\omega \in \mathbb{R})$

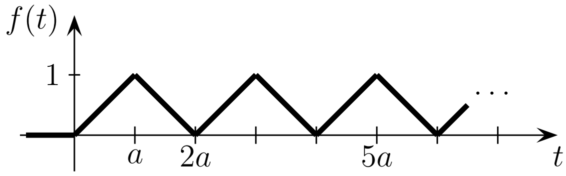
c) $f(t) = \sinh(\omega t) \quad (\omega \in \mathbb{R})$ **d)** $f(t) = \sinh^2(\omega t) \quad (\omega \in \mathbb{R})$

e) $f(t) = e^{at}\sin(bt) \quad (a \in \mathbb{C}, b \in \mathbb{R})$ **f)** $f(t) = \sin(\omega t + \varphi) \quad (\omega, \varphi \in \mathbb{R})$

g) $f(t) = \begin{cases} e^{t-1}\sin(t-1)\,, & t \geqslant 1 \\ 0\,, & t \in [0,1) \end{cases}$ **h)** $f(t) = \begin{cases} t\,, & 0 \leqslant t < 1 \\ 2-t\,, & 1 \leqslant t < 2 \\ 0\,, & \text{sonst} \end{cases}$

Aufgabe 2

Sei $a > 0$. Bestimmen Sie die Laplacetransformierte $\mathscr{L}(f)$ der unten abgebildeten, auf $[0,\infty)$ periodischen Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.



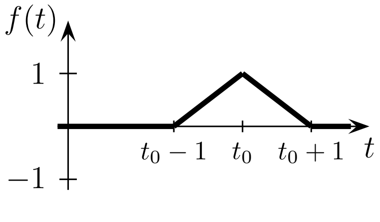
Aufgabe 3

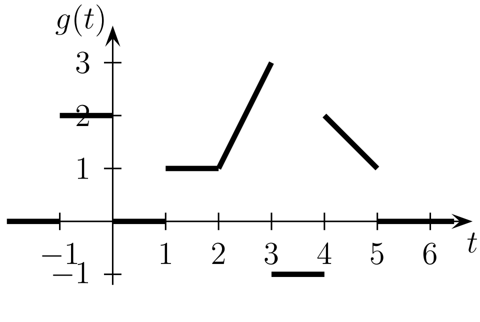
Bestimmen Sie jeweils eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit

a) $\mathscr{L}(f)(s) = \frac{1}{s-a} \quad (a \in \mathbb{C})\,;$ **b)** $\mathscr{L}(f)(s) = \frac{e^{-3s}}{s+2}\,;$ **c)** $\mathscr{L}(f)(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2+4}\,.$

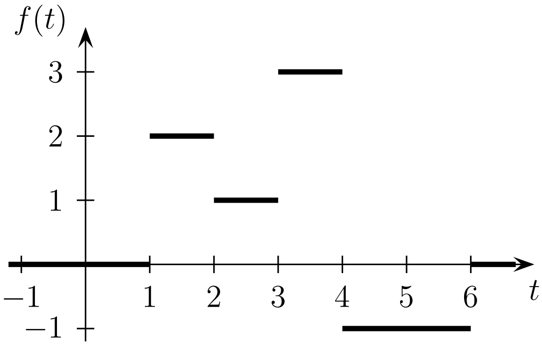
Aufgabe 4

Stellen Sie die Funktionen f und g mit Hilfe der Heaviside-Funktion h in einem geschlossenen Ausdruck dar.





Ermitteln Sie die Laplacetransformierte der unten dargestellten Funktion f.



Aufgabe 5

Die Schwingungsgleichung für eine schwingende Feder mit der Federkonstanten $\kappa > 0$, an der eine Masse $m > 0$ befestigt ist, lautet

$$m\,u''(t) + \kappa\,u(t) = 0 \qquad \text{für alle } t \geqslant 0\,.$$

Hierbei beschreibt $u(t)$ die Auslenkung der Masse vom Ruhepunkt 0 zur Zeit t. Zur Zeit 0 befinde sich die Masse im Ruhepunkt mit der Geschwindigkeit $v_0 > 0$. Es gelte also $u(0) = 0$ sowie $u'(0) = v_0$.
Berechnen Sie eine Lösung $u(t)$ dieses Anfangswertproblems.

Aufgabe 6

Sei $f \in \mathfrak{Z}$. Zeigen Sie, dass auch die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_0^t f(u)\,du$ in $\mathfrak{Z}$ liegt.

Aufgabe 7

Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(t) = 2te^{t^2}\cos(e^{t^2})\,.$$

Begründen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_0^\infty f(t)e^{-st}\,dt$ für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 0$ konvergiert, jedoch nicht absolut konvergiert.

Sprechstunde der Tutoren zu HM II und KAI: Montag, 13.09.2010, von 14:00 bis 15:30 Uhr in 1C-04 (Allianzgebäude 05.20).

Die **Prüfungen** zu HM II und KAI finden am **Montag, den 20.09.2010,** statt.

Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss**: Freitag, der 16.07.2010.

Weitere Informationen zu den Prüfungen entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage

`www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2etechphys2010s/`.

Bitte beachten Sie die Änderung bei den **zugelassenen Hilfsmitteln:**

HM II (Physik): drei handbeschriebene DIN A4 - Blätter (insgesamt sechs Seiten)

HM II (ETEC, Geod.): zwei handbeschriebene DIN A4 - Blätter (insgesamt vier Seiten)

KAI (ETEC): zwei handbeschriebene DIN A4 - Blätter (insgesamt vier Seiten)