

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen  
 Elektroingenieurwesen, Physik und Geodäsie inklusive  
 Komplexe Analysis und Integraltransformationen  
 Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt**

**Aufgabe 1**

- a) Mit  $g(t) := h(t)(t^2 + bt + c)$  erhält man nach Beispiel 2) in 8.5 wegen der Linearität von  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}(g)(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0,$$

und wegen  $f(t) = e^{at}g(t)$  gilt dann nach der Dämpfungsregel

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s - a) = \frac{2}{(s - a)^3} + \frac{b}{(s - a)^2} + \frac{c}{s - a} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > a.$$

- b) Wir benutzen die Darstellung  $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$ . Nach der Dämpfungsregel ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}(h(t)e^{i\omega t})(s) + \mathcal{L}(h(t)e^{-i\omega t})(s) \right) = \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}(h)(s - i\omega) + \mathcal{L}(h)(s + i\omega) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - i\omega} + \frac{1}{s + i\omega} \right) = \frac{1}{2} \frac{(s + i\omega) + (s - i\omega)}{s^2 - i^2\omega^2} = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0. \end{aligned}$$

*Bemerkung:* a) Mit  $\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$  erhält man  $\mathcal{L}(\sin(\omega t))(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$  für  $\operatorname{Re}(s) > 0$ .

b) Alternativ könnte man  $\mathcal{L}(\cos(\omega t))$  im Fall  $\omega > 0$  auch mit  $\mathcal{L}(\cos(t))(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$  und dem Skalierungsergebnis aus 10.1 berechnen: Hiernach gilt nämlich für jedes  $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{1}{\omega} \mathcal{L}(\cos(t))\left(\frac{s}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega} \frac{s/\omega}{(s/\omega)^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

- c) Es ist  $\sinh(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$ . Da die Laplacetransformation linear ist, bekommen wir nach der Dämpfungsregel für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > |\omega|$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}(h(t)e^{\omega t})(s) - \mathcal{L}(h(t)e^{-\omega t})(s) \right) = \frac{1}{2} \left( \mathcal{L}(h)(s - \omega) - \mathcal{L}(h)(s + \omega) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{s - \omega} - \frac{1}{s + \omega} \right) = \frac{1}{2} \frac{(s + \omega) - (s - \omega)}{s^2 - \omega^2} = \frac{\omega}{s^2 - \omega^2}. \end{aligned}$$

Wir mussten hier  $\operatorname{Re}(s) > |\omega|$  fordern, damit sowohl  $\mathcal{L}(h(t)e^{\omega t})(s)$  als auch  $\mathcal{L}(h(t)e^{-\omega t})(s)$  existieren. Bekanntlich liegt Konvergenz von  $\mathcal{L}(h(t)e^{\omega t})(s)$  nur für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \omega$  vor, entsprechend konvergiert  $\mathcal{L}(h(t)e^{-\omega t})(s)$  nur für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > -\omega$ . Beide Bedingungen an  $s$  sind für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > |\omega|$  erfüllt.

- d) Wir drücken die Funktion  $f$  zunächst mit Hilfe der Exponentialfunktion aus: Es ist

$$f(t) = \sinh^2(\omega t) = \left( \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2\omega t} - 2 + e^{-2\omega t}}{4}.$$

Damit folgt für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 2|\omega|$  (analoge Begründung wie zuvor im c)-Teil)

$$4 \mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(h(t)e^{2\omega t})(s) - \mathcal{L}(2h)(s) + \mathcal{L}(h(t)e^{-2\omega t})(s) = \frac{1}{s - 2\omega} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s + 2\omega},$$

und als Endergebnis erhalten wir für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 2|\omega|$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{s - 2\omega} + \frac{1}{s + 2\omega} \right) - \frac{1}{2s} = \frac{s}{2(s^2 - 4\omega^2)} - \frac{1}{2s} = \frac{2\omega^2}{s(s^2 - 4\omega^2)}.$$

e) Für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$  gilt nach der Dämpfungsregel und der Bemerkung a) im b)-Teil

$$\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(h \sin(b \cdot))(s - a) = \frac{b}{(s - a)^2 + b^2}.$$

f) Für jedes  $t \geq 0$  gilt nach dem Additionstheorem des Sinus

$$f(t) = \sin(\omega t) \cos \varphi + \cos(\omega t) \sin \varphi.$$

Hieraus folgt mit Hilfe des b)- und e)-Teils für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \cos \varphi \mathcal{L}(h \sin(\omega \cdot))(s) + \sin \varphi \mathcal{L}(h \cos(\omega \cdot))(s) = \cos \varphi \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} + \sin \varphi \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

*Bemerkung:* Falls  $\mathcal{L}(h \sin(\omega \cdot))$  und  $\mathcal{L}(h \cos(\omega \cdot))$  noch nicht bekannt sind, kann man  $\mathcal{L}(f)$  auch folgendermaßen berechnen: Die Funktion  $f$  erfüllt

$$\begin{aligned} f''(t) &= -\omega^2 f(t) \quad \text{für alle } t \geq 0, \\ f(0) &= \sin \varphi, \quad f'(0) = \omega \cos \varphi. \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität von  $\mathcal{L}$  folgt für jedes  $s \in \mathbb{C}$  mit hinreichend großem  $\operatorname{Re}(s)$

$$0 = \mathcal{L}(0)(s) = \mathcal{L}(f'' + \omega^2 f)(s) = \mathcal{L}(f'')(s) + \omega^2 \mathcal{L}(f)(s). \quad (1)$$

Außerdem gilt nach dem Differentiationssatz 10.4

$$\mathcal{L}(f'')(s) = s^2 \mathcal{L}(f)(s) - (s f(0+) + f'(0+)).$$

Setzt man dies in (1) ein und verwendet  $f(0) = \sin \varphi$ ,  $f'(0) = \omega \cos \varphi$  unter Berücksichtigung der Stetigkeit von  $f$  und  $f'$  in 0, so erhält man

$$0 = (s^2 + \omega^2) \mathcal{L}(f)(s) - (s \sin \varphi + \omega \cos \varphi),$$

also

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s \sin \varphi + \omega \cos \varphi}{s^2 + \omega^2}.$$

g) Für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 0$  gilt  $\mathcal{L}(h \sin)(s) = \frac{1}{s^2 + 1}$ . Definiere  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $g(t) = e^t \sin(t)$  für  $t \geq 0$  und  $g(t) = 0$  für  $t < 0$ . Dann liefert die Dämpfungsregel

$$\mathcal{L}(g)(s) = \mathcal{L}(h \sin)(s - 1) = \frac{1}{(s - 1)^2 + 1} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 1.$$

Wegen  $f(t) = g(t - 1)$  haben wir nach der Verschiebungsregel

$$\mathcal{L}(f)(s) = e^{-1 \cdot s} \mathcal{L}(g)(s) = \frac{e^{-s}}{(s - 1)^2 + 1} \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 1.$$

h) Nach Definition ist

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^2 e^{-st} (2 - t) dt.$$

Diese Integrale sind für alle  $s \in \mathbb{C}$  (absolut) konvergent. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Für  $s = 0$  ist  $\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^1 t dt + \int_1^2 (2 - t) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ .

Im Fall  $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  liefert partielle Integration

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^2 e^{-st} (2 - t) dt \\ &= \left( \frac{e^{-st}}{-s} t \right) \Big|_{t=0}^1 - \int_0^1 \frac{e^{-st}}{-s} dt + \left( \frac{e^{-st}}{-s} (2 - t) \right) \Big|_{t=1}^2 - \int_1^2 \frac{e^{-st}}{s} dt \\ &= -\frac{1}{s} e^{-s} - \left( \frac{1}{s^2} e^{-st} \right) \Big|_{t=0}^1 + \frac{1}{s} e^{-s} + \left( \frac{1}{s^2} e^{-st} \right) \Big|_{t=1}^2 \\ &= \frac{1}{s^2} (-e^{-s} + 1) + \frac{1}{s^2} (e^{-2s} - e^{-s}) \\ &= \frac{1}{s^2} (e^{-2s} - 2e^{-s} + 1) = \frac{1}{s^2} (e^{-s} - 1)^2. \end{aligned}$$

## Aufgabe 2

Da die Funktion  $f$  auf  $[0, \infty)$   $2a$ -periodisch ist, lässt sich  $\mathcal{L}(f)$  nach Satz 2 in 8.5 durch

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1 - e^{-2as}} \int_0^{2a} e^{-st} f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(s) > 0, \quad (2)$$

berechnen. Um das Integral  $\int_0^{2a} e^{-st} f(t) dt$  zu bestimmen, definieren wir

$$g(t) := \begin{cases} t & \text{für } 0 \leq t < 1 \\ 2 - t & \text{für } 1 \leq t < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Dann gilt gemäß Aufgabe 1 h):  $\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{s^2}(e^{-s} - 1)^2$  für  $\operatorname{Re}(s) > 0$ . Ist

$$g_a(t) := g(t/a) = \begin{cases} t/a & \text{für } 0 \leq t < a \\ 2 - t/a & \text{für } a \leq t < 2a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

gesetzt, so folgt mit dem Skalierungsergebnis aus 10.1

$$\mathcal{L}(g_a)(s) = \frac{1}{1/a} \mathcal{L}(g)\left(\frac{s}{1/a}\right) = \frac{1}{as^2}(e^{-as} - 1)^2, \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Nun gilt aber  $f(t) = g_a(t)$  für alle  $t \in [0, 2a)$ ; da ferner  $g_a(t) = 0$  für alle  $t \geq 2a$  ist, ergibt sich für  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\int_0^{2a} e^{-st} f(t) dt = \mathcal{L}(g_a)(s) = \frac{1}{as^2}(e^{-as} - 1)^2.$$

[Natürlich könnte man  $\int_0^{2a} e^{-st} f(t) dt$  auch direkt mittels partieller Integration berechnen.] Mit (2) folgt hieraus für jedes  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{1 - e^{-2as}} \cdot \frac{1}{as^2}(e^{-as} - 1)^2 = \frac{1}{as^2} \cdot \frac{(e^{-as} - 1)^2}{(1 - e^{-as})(1 + e^{-as})} = \frac{1}{as^2} \cdot \frac{1 - e^{-as}}{1 + e^{-as}}.$$

## Aufgabe 3

- a) Für  $f$ , definiert durch  $f(t) = e^{at}$  für  $t \geq 0$  und  $f(t) = 0$  für  $t < 0$ , ergibt sich  $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s-a}$ .
- b) Wir definieren zunächst  $g(t) = e^{-2t}$  für  $t \geq 0$  und  $g(t) = 0$  für  $t < 0$ . Dann gilt  $\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{s+2}$  für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > -2$ . Ist  $f(t) := g(t-3)$  gesetzt, so gilt nach der Verschiebungsregel

$$\frac{e^{-3s}}{s+2} = e^{-3s} \mathcal{L}(g)(s) = \mathcal{L}(f)(s).$$

- c) Aufgrund von  $\mathcal{L}(h(t) \cos(2t))(s) = \frac{s}{s^2+2^2}$  und  $\mathcal{L}(h(t) \sin(2t))(s) = \frac{2}{s^2+2^2}$  bekommen wir mit Hilfe der Linearität von  $\mathcal{L}$  und der Dämpfungsregel

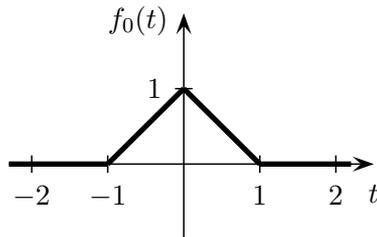
$$\begin{aligned} \frac{s+3}{(s+1)^2+4} &= \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{2}{(s+1)^2+4} = \mathcal{L}(h(t) \cos(2t))(s+1) + \mathcal{L}(h(t) \sin(2t))(s+1) \\ &= \mathcal{L}(h(t)(\cos(2t) + \sin(2t)))(s+1) = \mathcal{L}(h(t)e^{-t}(\cos(2t) + \sin(2t)))(s). \end{aligned}$$

Demnach gilt  $\mathcal{L}(f)(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2+4}$  für  $f(t) := \begin{cases} e^{-t}(\cos(2t) + \sin(2t)) & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0. \end{cases}$

#### Aufgabe 4

- a) Wir betrachten zunächst den Spezialfall  $t_0 = 0$  und überlegen uns den allgemeinen Fall anschließend.

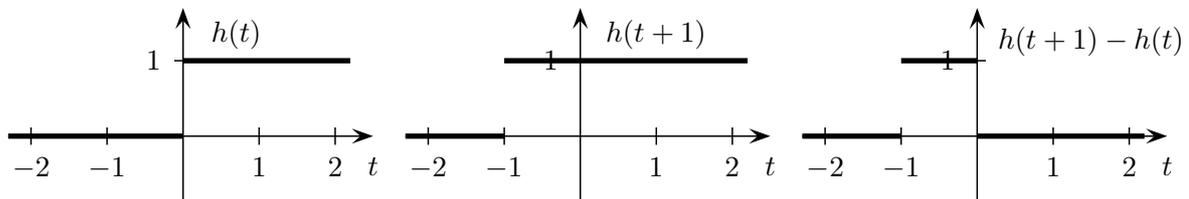
Die zu  $t_0 = 0$  gehörige Funktion bezeichnen wir durch  $f_0$ . Es ist also



Hieraus kann man sofort

$$f_0(t) = \begin{cases} 1+t & t \in [-1, 0) \\ 1-t & t \in [0, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ablesen. Diese Fallunterscheidung wollen wir mit Hilfe der Heaviside-Funktion  $h$  ausdrücken. Wie man sich anhand der Graphen



leicht überlegt, gilt

$$h(t+1) - h(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-1, 0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Analog erhält man

$$h(t) - h(t-1) = \begin{cases} 1 & t \in [0, 1), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hiermit lässt sich  $f_0$  in dem geschlossenen Ausdruck

$$f_0(t) = (h(t+1) - h(t))(1+t) + (h(t) - h(t-1))(1-t), \quad t \in \mathbb{R},$$

schreiben. Die ursprüngliche Funktion  $f$  gewinnen wir durch Verschiebung von  $f_0$  um  $t_0$  zurück. Deshalb folgt für jedes  $t \in \mathbb{R}$

$$f(t) = f_0(t-t_0) = (h(t-t_0+1) - h(t-t_0))(1+t-t_0) + (h(t-t_0) - h(t-t_0-1))(1-t+t_0).$$

Ein etwas eleganterer Weg wäre,  $f_0(t) = (h(t+1) - h(t-1))(1-|t|) = \begin{cases} 1-|t| & t \in [-1, 1) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$  zu schreiben und wie eben zu verschieben.

- b) Wir haben für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = \begin{cases} 2 & t \in [-1, 0) \\ 1 & t \in [1, 2) \\ 2t-3 & t \in [2, 3) \\ -1 & t \in [3, 4) \\ 6-t & t \in [4, 5) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit

$$g(t) = 2(h(t+1) - h(t)) + (h(t-1) - h(t-2)) + (2t-3)(h(t-2) - h(t-3)) - (h(t-3) - h(t-4)) + (6-t)(h(t-4) - h(t-5)).$$

- c) Zuerst geben wir die Funktion  $f$  mit Hilfe der Heaviside-Funktion  $h$  in einem geschlossenen Ausdruck an. Für  $t \in \mathbb{R}$  ist

$$\begin{aligned} f(t) &= 2(h(t-1) - h(t-2)) + (h(t-2) - h(t-3)) + 3(h(t-3) - h(t-4)) \\ &\quad - (h(t-4) - h(t-6)) \\ &= 2h(t-1) - h(t-2) + 2h(t-3) - 4h(t-4) + h(t-6). \end{aligned}$$

Nach der Verschiebungsregel gilt für jedes  $a \geq 0$  und  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\mathcal{L}(h(t-a))(s) = e^{-as} \mathcal{L}(h)(s) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

Hiermit ergibt sich aufgrund der Linearität von  $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s} (2e^{-s} - e^{-2s} + 2e^{-3s} - 4e^{-4s} + e^{-6s}) \quad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

### Aufgabe 5

Wir wollen eine Lösung von

$$\begin{aligned} m u''(t) + \kappa u(t) &= 0 \quad \text{für alle } t \geq 0 \\ u(0) &= 0, \quad u'(0) = v_0 \end{aligned}$$

bestimmen. Hierbei sind  $m, \kappa, v_0 > 0$  fest vorgegebene Zahlen. Wendet man die Laplacetransformation  $\mathcal{L}$  auf obige Gleichung an, so ergibt sich für  $s \in \mathbb{C}$  mit hinreichend großem  $\operatorname{Re}(s)$

$$m \mathcal{L}(u'')(s) + \kappa \mathcal{L}(u)(s) = 0$$

bzw. mit  $\mathcal{L}(u'')(s) = s^2 \mathcal{L}(u)(s) - s u(0) - u'(0)$  und den Anfangswerten  $u(0) = 0, u'(0) = v_0$

$$m(s^2 \mathcal{L}(u)(s) - v_0) + \kappa \mathcal{L}(u)(s) = 0.$$

Auflösen nach  $\mathcal{L}(u)(s)$  liefert

$$\mathcal{L}(u)(s) = \frac{m v_0}{m s^2 + \kappa} = \frac{v_0}{s^2 + \frac{\kappa}{m}}.$$

Ist  $\omega := \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$  gesetzt, so erhalten wir

$$\mathcal{L}(u)(s) = \frac{v_0}{s^2 + \omega^2} = \frac{v_0}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

und wegen  $\mathcal{L}(\sin(\omega t))(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

$$\mathcal{L}(u)(s) = \frac{v_0}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{v_0}{\omega} \mathcal{L}(\sin(\omega t))(s).$$

Damit ist die durch

$$u(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) = \sqrt{\frac{m}{\kappa}} v_0 \sin\left(\sqrt{\frac{\kappa}{m}} t\right), \quad t \geq 0,$$

gegebene Funktion  $u$  Kandidat für eine Lösung des obigen Problems und -wie man leicht verifiziert- tatsächlich eine Lösung. *Bemerkung:* Die Lösung ist eindeutig bestimmt ( $\rightarrow$  HM III).

### Aufgabe 6

Sei  $f \in \mathfrak{J}$ . Da  $f$  auf  $(-\infty, 0)$  verschwindet, folgt  $g(t) = 0$  für alle  $t \in (-\infty, 0)$ . Ferner ist  $g$  nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stetig und stückweise glatt ( $g'(t) = f(t)$  in allen Stetigkeitsstellen  $t$  von  $f$ ). Da  $f$  höchstens von exponentiellem Wachstum ist, gibt es Konstanten  $M > 0, \sigma \in \mathbb{R}$  mit  $|f(t)| \leq M e^{\sigma t}$  für alle  $t \geq 0$ . Deshalb gilt für jedes  $t \geq 0$

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(u)| du \leq M \int_0^t e^{\sigma u} du = \begin{cases} \frac{M}{\sigma} (e^{\sigma t} - 1) \leq \frac{M}{\sigma} e^{\sigma t} & \text{für } \sigma > 0, \\ Mt & \text{für } \sigma = 0, \\ \frac{M}{-\sigma} (1 - e^{\sigma t}) \leq \frac{M}{|\sigma|} & \text{für } \sigma < 0. \end{cases}$$

Also ist  $g$  höchstens von exponentiellem Wachstum. Fazit:  $g \in \mathfrak{J}$ .

## Aufgabe 7

Wir nutzen aus, dass eine Stammfunktion von  $f$  durch  $F(t) := \sin(e^{t^2})$  gegeben ist. Mit partieller Integration erhalten wir für  $R > 0$  und  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\int_0^R e^{-st} f(t) dt = \left( e^{-st} F(t) \right) \Big|_{t=0}^R - \int_0^R -s e^{-st} F(t) dt = e^{-sR} F(R) - F(0) + s \int_0^R e^{-st} \sin(e^{t^2}) dt.$$

Für  $R \rightarrow \infty$  konvergiert der erste Summand gegen 0, denn es gilt für jedes  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$|e^{-sR} F(R)| = e^{-\operatorname{Re}(s)R} |\sin(e^{R^2})| \leq e^{-\operatorname{Re}(s)R} \rightarrow 0 \quad \text{für } R \rightarrow \infty.$$

Wegen  $|\sin(e^{t^2})| \leq 1 \cdot e^{0 \cdot t}$  für alle  $t \geq 0$  ist  $F(t) = \sin(e^{t^2})$  höchstens von exponentiellem Wachstum, so dass das Integral  $\int_0^\infty e^{-st} \sin(e^{t^2}) dt$  nach Satz 1 in 8.3 für alle  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 0$  absolut konvergiert. Hiermit ist die Konvergenz von  $\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L}(f)(s)$  für jedes  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 0$  gezeigt. Überdies gilt für solche  $s$

$$\mathcal{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = -F(0) + s \mathcal{L}(\sin(e^{t^2}))(s).$$

Nun müssen wir noch einsehen, dass dabei keine absolute Konvergenz vorliegt. Hierzu weisen wir nach, dass der Grenzwert  $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R |f(t) e^{-st}| dt$  nicht endlich ist. Unsere Strategie besteht darin, das Integral  $\int_0^R |f(t) e^{-st}| dt$  nach unten durch etwas für  $R \rightarrow \infty$  Divergentes abzuschätzen.

Sei dazu  $R > 0$ . Die Substitution  $r := e^{t^2}$ ,  $dr = 2te^{t^2} dt = 2tr dt$  liefert für jedes  $s \in \mathbb{C}$  mit  $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^R |f(t) e^{-st}| dt &= \int_0^R 2te^{t^2} |\cos(e^{t^2})| e^{-\operatorname{Re}(s)t} dt = e^{-\frac{\operatorname{Re}(s)^2}{4}} \int_0^R 2te^{(t - \frac{\operatorname{Re}(s)}{2})^2} |\cos(e^{t^2})| dt \\ &\geq e^{-\frac{\operatorname{Re}(s)^2}{4}} \int_0^R 2t |\cos(e^{t^2})| dt \stackrel{r:=e^{t^2}}{=} e^{-\frac{\operatorname{Re}(s)^2}{4}} \int_1^{e^{R^2}} \frac{|\cos(r)|}{r} dr. \end{aligned}$$

Demzufolge reicht zu begründen, dass  $\int_1^{e^{R^2}} \frac{|\cos(r)|}{r} dr$  für  $R \rightarrow \infty$  divergiert. Hierzu weisen wir die Divergenz von  $\int_1^{N\pi} \frac{|\cos(t)|}{t} dt$  für  $N \rightarrow \infty$  nach. Für  $N \in \mathbb{N}$  gilt

$$\int_1^{N\pi} \frac{|\cos(t)|}{t} dt = \sum_{k=1}^{N-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos(t)|}{t} dt.$$

Für jedes  $k = 1, \dots, N-1$  können wir das Integral  $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos(t)|}{t} dt$  nach unten durch

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos(t)|}{t} dt \geq \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\cos(t)|}{(k+1)\pi} dt = \frac{1}{(k+1)\pi} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\cos(t)| dt$$

abschätzen, und aufgrund der  $\pi$ -Periodizität von  $t \mapsto |\cos(t)|$  ist

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} |\cos(t)| dt = \int_0^\pi |\cos(t)| dt = \int_0^{\pi/2} \cos(t) dt + \int_{\pi/2}^\pi -\cos(t) dt = 2.$$

Insgesamt haben wir

$$\int_1^{N\pi} \frac{|\cos(t)|}{t} dt \geq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k+1}$$

nachgerechnet. Da  $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=2}^N \frac{1}{n} = \infty$  (harmonische Reihe) gilt, schließen wir, dass das Integral  $\int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$  nicht absolut konvergent ist.