Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2011

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Diese Abbildung ist linear, denn für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ gilt

$$f(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = f(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + y_1 \\ \lambda x_2 + y_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7(\lambda x_2 + y_2) \\ i(\lambda x_1 + y_1) + (\lambda x_2 + y_2) \\ 3(\lambda x_1 + y_1) - 4i(\lambda x_2 + y_2) \end{pmatrix}$$
$$= \lambda \begin{pmatrix} 7x_2 \\ ix_1 + x_2 \\ 3x_1 - 4ix_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7y_2 \\ iy_1 + y_2 \\ 3y_1 - 4iy_2 \end{pmatrix} = \lambda f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) + f(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}).$$

Die Darstellungsmatrix von f bzgl. der Standardbasen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ des $\mathbb{C}^2$ und $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ des $\mathbb{C}^3$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ i & 1 \\ 3 & -4i \end{pmatrix},$$

denn es gilt

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot \vec{e}_1 + i \cdot \vec{e}_2 + 3 \cdot \vec{e}_3 \qquad \text{und} \qquad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ -4i \end{pmatrix} = 7 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 - 4i \cdot \vec{e}_3 .$$

Alternativ: Da für alle $x, y \in \mathbb{C}$

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 7y \\ ix + y \\ 3x - 4iy \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 7 \\ i & 1 \\ 3 & -4i \end{pmatrix}}_{=: A \in \mathbb{C}^{(3,2)}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

gilt, ist f nach Beispiel 19.5, 6. d) linear und A die Darstellungsmatrix von f bzgl. der kanonischen Basen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ des $\mathbb{C}^2$ und $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ des $\mathbb{C}^3$.

b) Die Abbildung ist nicht linear, denn es gilt $f(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$. Für eine lineare Abbildung ϕ muss jedoch stets $\phi(\vec{0}) = \phi(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot \phi(\vec{0}) = \vec{0}$ gelten.

c) Sei $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ mit $\|\vec{a}\| = 1$ fest vorgegeben. Die Abbildung $P_{\vec{a}} \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto (\vec{x} \cdot \vec{a})\, \vec{a}$ ist linear, denn für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ ergibt sich mit den Eigenschaften des Skalarproduktes

$$P_{\vec{a}}(\alpha \vec{x} + \vec{y}) = ((\alpha \vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{a})\, \vec{a} = \alpha (\vec{x} \cdot \vec{a})\, \vec{a} + (\vec{y} \cdot \vec{a})\, \vec{a} = \alpha P_{\vec{a}}(\vec{x}) + P_{\vec{a}}(\vec{y}) .$$

Um die Darstellungsmatrix von $P_{\vec{a}}$ bezüglich der Standardbasis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ des $\mathbb{R}^3$ anzugeben, berechnen wir das Bild $P_{\vec{a}}(\vec{e}_j)$ des Basisvektors $\vec{e}_j$ (für $j \in \{1, 2, 3\}$) und stellen dieses als

Linearkombination von $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ (den Basisvektoren im Zielraum) dar. Ist $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$, so ergibt sich für jedes $j \in \{1, 2, 3\}$

$$P_{\vec{a}}(\vec{e}_j) = (\vec{e}_j \cdot \vec{a})\,\vec{a} = a_j\vec{a} = \begin{pmatrix} a_ja_1 \\ a_ja_2 \\ a_ja_3 \end{pmatrix} = (a_ja_1)\vec{e}_1 + (a_ja_2)\vec{e}_2 + (a_ja_3)\vec{e}_3 \,.$$

Damit lautet die j-te Spalte der gesuchten Darstellungsmatrix: $\begin{pmatrix} a_ja_1 \\ a_ja_2 \\ a_ja_3 \end{pmatrix}$ für $j \in \{1, 2, 3\}$. Also ist die Darstellungsmatrix von $P_{\vec{a}}$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ gleich

$$\begin{pmatrix} a_1^2 & a_2a_1 & a_3a_1 \\ a_1a_2 & a_2^2 & a_3a_2 \\ a_1a_3 & a_2a_3 & a_3^2 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wir können alternative Basen des $\mathbb{R}^3$ "vorne" und "hinten" wählen (jedoch war die Aufgabenstellung eine andere!). Sei etwa $\vec{a}$ das erste Basiselement und $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ so, dass $(\vec{a}, \vec{x}, \vec{y})$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ bildet. Diese Basis wählen wir sowohl "vorne" als auch "hinten". Da $\vec{a}, \vec{x}, \vec{y}$ orthonormal sind, gilt dann $P_{\vec{a}}(\vec{a}) = \vec{a} = 1\vec{a} + 0\vec{x} + 0\vec{y}$ sowie $P_{\vec{a}}(\vec{x}) = P_{\vec{a}}(\vec{y}) = 0 = 0\vec{a} + 0\vec{x} + 0\vec{y}$. Bezüglich dieser Basis hat die Darstellungsmatrix von $P_{\vec{a}}$ die besonders einfache Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Aufgrund der Linearität von ϕ gilt

$$\begin{aligned}
\phi(\vec{e}_1) &= \phi(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) - \phi(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) = (\vec{e}_2 - \vec{e}_3) - \vec{e}_1 = (-1)\vec{e}_1 + 1\vec{e}_2 + (-1)\vec{e}_3 \,, \\
\phi(\vec{e}_2) &= \phi(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) - \phi(\vec{e}_3) = \vec{e}_1 - (2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3) = (-1)\vec{e}_1 + (-3)\vec{e}_2 + (-5)\vec{e}_3 \,, \\
\phi(\vec{e}_3) &= 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3 \,.
\end{aligned}$$

Somit lautet die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich der Standardbasis $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ des $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Wenn nicht vorgegeben ist, bezüglich welcher Basen man eine Darstellungsmatrix angeben soll, kann man die Aufgabe sehr elegant lösen, indem man die Basen besonders geschickt wählt: Nimmt man "vorne" etwa die Basis $(\vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ und "hinten" die Basis $(2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 5\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2 - \vec{e}_3)$ (Man sieht leicht, dass es sich dabei tatsächlich um Basen des $\mathbb{R}^3$ handelt), dann bildet ϕ den j-ten Basisvektor der "vorderen" Basis auf den j-ten Basisvektor der "hinteren" Basis ab, weshalb die Darstellungsmatrix von ϕ bezüglich dieser Basen die Einheitsmatrix E_3 ist. Beachte: ϕ ist nicht die Identitätsabbildung!

Aufgabe 3

a) Um zu begründen, dass $B := (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis von $W := \mathrm{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ ist, reicht es zu zeigen, dass v_1, v_2, v_3, v_4 in $C^2((-\pi, \pi))$ linear unabhängig sind. Seien dazu $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{C}$ mit $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 = n$. Hierbei bezeichnet $n\colon (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}, x \mapsto 0$, die Nullfunktion, also den Nullvektor in $C^2((-\pi, \pi))$. Für alle $x \in (-\pi, \pi)$ gilt dann

$$c_1 \sin x + c_2 \cos x + c_3 x \sin x + c_4 x \cos x = 0 \,.$$

Insbesondere für $x = 0$ ergibt sich $c_2 = 0$. Dies führt auf

$$c_1 \sin x + c_3 x \sin x + c_4 x \cos x = 0 \qquad \text{für alle } x \in (-\pi, \pi). \tag{$*$}$$

Differenzieren wir diese Gleichung, so erhalten wir

$$c_1 \cos x + c_3 x \cos x + c_3 \sin x - c_4 x \sin x + c_4 \cos x = 0 \qquad \text{für alle } x \in (-\pi, \pi). \tag{$**$}$$

Für $x = 0$ ist gemäß $(**)$: $c_1 + c_4 = 0$. (I)

Für $x = \frac{\pi}{2}$ gilt nach $(**)$: $c_3 - c_4 \frac{\pi}{2} = 0$. (II)

Für $x = \frac{\pi}{2}$ gilt nach $(*)$: $c_1 + c_3 \frac{\pi}{2} = 0$. (III)

Löst man (II) nach c_3 auf und setzt dies in (III) ein, so bekommt man $0 = c_1 + (c_4 \frac{\pi}{2}) \frac{\pi}{2} = c_1 + \frac{\pi^2}{4} c_4$. Subtraktion dieser Gleichung von (I) führt auf $(1 - \frac{\pi^2}{4}) c_4 = 0$, also $c_4 = 0$. Laut (I) und (II) muss damit auch $c_1 = c_3 = 0$ gelten.

Insgesamt haben wir $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 0$. Somit sind v_1, v_2, v_3, v_4 linear unabhängig.

b) Wir zeigen zunächst, dass für jedes $f \in W$ auch $D(f)$ in W liegt. Sei dazu $f \in W$, etwa $f = a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4$ für gewisse Zahlen $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C}$. Dann ist f differenzierbar und es gilt für alle $x \in (-\pi, \pi)$

$$D(f)(x) = f'(x) = (a_3 - a_2) \sin x + (a_1 + a_4) \cos x + a_3 x \cos x - a_4 x \sin x.$$

Folglich liegt $D(f)$ in W, so dass D tatsächlich von W nach W abbildet.

D ist linear, denn für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $f, g \in W$ gilt

$$D(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha D(f) + \beta D(g)\,.$$

c) Wegen

$$\begin{aligned}
D(v_1) &= v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4, \\
D(v_2) &= -v_1 = (-1) \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4, \\
D(v_3) &= v_1 + v_4 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4, \\
D(v_4) &= v_2 - v_3 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3 + 0 \cdot v_4
\end{aligned}$$

lautet die Darstellungsmatrix $M(D)$ von D bzgl. der Basis $B := (v_1, v_2, v_3, v_4)$

$$M(D) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Darstellungsmatrix $M(D^2)$ von D^2 bzgl. der Basis B gilt

$$M(D^2) = M(D)^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Auf das selbe Ergebnis kommen wir, wenn wir uns überlegen, wie die Koordinaten bzgl. der Basis B der Bilder der Basisvektoren von W unter D^2 aussehen:

$$\begin{aligned}
D^2(v_1) &= D(D(v_1)) = D(v_2) = -v_1 = (-1) \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4, \\
D^2(v_2) &= D(D(v_2)) = D(-v_1) = -v_2 = 0 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4, \\
D^2(v_3) &= D(D(v_3)) = D(v_1 + v_4) = 2v_2 - v_3 = 0 \cdot v_1 + 2 \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3 + 0 \cdot v_4, \\
D^2(v_4) &= D(D(v_4)) = D(v_2 - v_3) = -2v_1 - v_4 = (-2) \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + (-1) \cdot v_4.
\end{aligned}$$

Also besteht die k-te Spalte der Darstellungsmatrix exakt aus den Koordinaten von $D^2(v_k)$ bzgl. der Basis B (für $k = 1, 2, 3, 4$).

d) Die Koordinaten der Funktion g bzgl. der Basis B sind $\begin{pmatrix}0\\5\\2\\0\end{pmatrix}$. Daher ergibt sich für die Koordinaten von $D^2(g)$ bzgl. der Basis B

$$M(D^2)\begin{pmatrix}0\\5\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & -1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\5\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\-2\\0\end{pmatrix},$$

also $D^2(g) = 0 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 + (-2) \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = -v_2 - 2v_3$.

Auf dieses Ergebnis kommen wir durch Differenzieren von g: $g'(x) = 2\sin x + 2x\cos x - 5\sin x$, $g''(x) = 2\cos x + 2\cos x - 2x\sin x - 5\cos x = -\cos x - 2x\sin x = -v_2(x) - 2v_3(x)$, $x \in (-\pi, \pi)$.

Aufgabe 4

Wir verwenden die folgende Eigenschaft des Vektorprodukts (vgl. Bemerkung 2 in 18.6):
Zwei Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ sind genau dann linear abhängig, wenn $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$ gilt.

Beweis: "$\Rightarrow$": Die Vektoren $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ seien linear abhängig, also $\vec{x} = \vec{0}$ oder $\vec{y} = \lambda\vec{x}$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$. Ist $\vec{x} = \vec{0}$, so gilt $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0} \times \vec{y} = \vec{0}$. Ist $\vec{y} = \lambda\vec{x}$, so gilt nach Satz 7 1. aus Kapitel 18

$$\vec{x} \times \vec{y} = (\lambda\vec{y}) \times \vec{y} = \lambda(\vec{y} \times \vec{y}) = \lambda\vec{0} = \vec{0}\,.$$

"$\Leftarrow$": Es gelte $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{0}$. Ist $\vec{x} = \vec{0}$ oder $\vec{y} = \vec{0}$, so sind $\vec{x}, \vec{y}$ linear abhängig. Nun seien $\vec{x} \neq \vec{0}$ und $\vec{y} \neq \vec{0}$. Nach Satz 7 7. aus Kapitel 18 gilt

$$0 = \|\vec{x} \times \vec{y}\| = \|\vec{x}\|\,\|\vec{y}\|\,\sin(\angle(\vec{x}, \vec{y}))\,, \qquad \text{also} \qquad \sin(\angle(\vec{x}, \vec{y})) = 0.$$

Hieraus folgt $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ oder $\angle(\vec{x}, \vec{y}) = \pi$. Das bedeutet, dass $\vec{x}$ und $\vec{y}$ in die selbe Richtung zeigen, d.h. dass es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt mit $\vec{y} = \lambda\vec{x}$. Somit sind auch in diesem Fall $\vec{x}, \vec{y}$ linear abhängig.

Kern ϑ: Setze $\vec{F} := (1, 1, 1)$. Es sei $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ mit $\vartheta(\vec{x}) = \vec{0}$, also mit $\vec{x} \times \vec{F} = \vec{0}$. Nach der Vorbemerkung ist dies äquivalent dazu, dass $\vec{x}$ und $\vec{F}$ linear abhängig sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\vec{x}$ in $\mathrm{Lin}(\vec{F})$ liegt. Infolgedessen ist $\mathrm{Kern}\,\vartheta = \mathrm{Lin}(\vec{F})$. Insbesondere ist $\dim \mathrm{Kern}\,\vartheta = 1$.

Bild ϑ: Wir überlegen uns zunächst die Dimension von $\mathrm{Bild}\,\vartheta$. Da ϑ linear ist, gilt nach der Dimensionsformel $\dim \mathrm{Bild}\,\vartheta + \dim \mathrm{Kern}\,\vartheta = \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Wegen $\dim \mathrm{Kern}\,\vartheta = 1$ muss $\dim \mathrm{Bild}\,\vartheta = 2$ gelten. Deshalb sind wir fertig, sobald wir zwei linear unabhängige Vektoren $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ aus $\mathrm{Bild}\,\vartheta$ gefunden haben. Dann ist nämlich $\mathrm{Bild}\,\vartheta = \mathrm{Lin}(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$. Doch wie finden wir $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$? Nach Satz 7 6. aus Kapitel 18 gilt stets $\vec{x} \times \vec{F} \perp \vec{F}$, also $\vartheta(\vec{x}) \perp \vec{F}$. Wir wählen zwei zu $\vec{F}$ orthogonale, linear unabhängige Vektoren, etwa $\vec{w}_1 := (-1, 1, 0)$ und $\vec{w}_2 := (-1, 0, 1)$, und begründen, dass sowohl $\vec{w}_1$ als auch $\vec{w}_2$ in $\mathrm{Bild}\,\vartheta$ liegen, d.h. dass es $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in \mathbb{R}^3$ gibt mit $\vartheta(\vec{x}_1) = \vec{w}_1$ und $\vartheta(\vec{x}_2) = \vec{w}_2$. Ist $\vec{x}_1 = (z_1, z_2, z_3)$, so gilt

$$\vartheta(\vec{x}_1) = \vec{x}_1 \times \vec{F} = \begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z_2 - z_3\\z_3 - z_1\\z_1 - z_2\end{pmatrix}.$$

Beispielsweise für $(z_1, z_2, z_3) = (1, 1, 2)$ ist dies gleich $(-1, 1, 0) = \vec{w}_1$. Mit einer ähnlichen Überlegung sehen wir $\vartheta((2, 1, 2)) = (2, 1, 2) \times \vec{F} = \vec{w}_2$.

Bemerkung: Ist $\vec{F} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ ein beliebig vorgegebener Vektor und $\vartheta\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\vec{x} \mapsto \vartheta(\vec{x}) := \vec{x} \times \vec{F}$, so kann man allgemein zeigen: $\mathrm{Bild}\,\vartheta = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{y} \perp \vec{F}\}$, $\mathrm{Kern}\,\vartheta = \mathrm{Lin}(\vec{F})$.

Aufgabe 5

"$\Rightarrow$": Sei $f\colon V \to W$ ein Isomorphismus. Um zu begründen, dass $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ eine Basis von W bildet, müssen wir folgendes zeigen:
i) $\mathrm{Lin}(f(v_1), \dots, f(v_n)) = W$ und ii) $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sind linear unabhängig.
Zu i) "$\subset$": Wegen $f(v_k) \in W$ für jedes $k = 1, \dots, n$ ist diese Inklusion erfüllt.
"$\supset$": Sei $w \in W$. Wir wollen zeigen, dass w in $\mathrm{Lin}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ liegt, dass also w als Linearkombination der $f(v_1), \dots, f(v_n)$ geschrieben werden kann. Wegen $f(V) = W$ (f war als surjektiv vorausgesetzt) existiert zu w ein $v \in V$ mit $w = f(v)$. Da $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V bildet, existieren Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$. Deshalb ist

$$w = f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) \in \mathrm{Lin}(f(v_1), \dots, f(v_n)) .$$

Zu ii) Seien $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) = 0$. Da f linear ist, folgt $f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = 0$. Da f injektiv ist, folgt $a_1 v_1 + \dots + a_n v_n = 0$ und aus der linearen Unabhängigkeit der $v_1, \dots, v_n$ folgt dann $a_1 = \dots = a_n = 0$.

"$\Leftarrow$": Nun sei $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ eine Basis von W. Um die Isomorphie von f nachzuweisen, müssen wir begründen, dass f injektiv und surjektiv ist.
Beh.: f ist injektiv. Wir zeigen die äquivalente Aussage (vgl. Übung) $\mathrm{Kern}\, f = \{0\}$.
Sei $v \in \mathrm{Kern}\, f$. Da $v \in V$ und $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V ist, existieren $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$. Also ist

$$0 = f(v) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n) = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n).$$

Da $f(v_1), \dots, f(v_n)$ linear unabhängig sind, folgt $a_1 = \dots = a_n = 0$. Also ist $v = 0$, d.h. $\mathrm{Kern}\, f \subset \{0\}$. Aufgrund der Linearität von f ist die andere Inklusion $\{0\} \subset \mathrm{Kern}\, f$ klar.

Beh.: f ist surjektiv. Sei $w \in W$. Da $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ eine Basis von W ist, existieren Zahlen $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ mit $w = a_1 f(v_1) + \dots + a_n f(v_n) = f(a_1 v_1 + \dots + a_n v_n)$. Ist $v := a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ gesetzt, so gilt $w = f(v)$, also $W \subset f(V)$. Die Inklusion $f(V) \subset W$ ist wegen $f\colon V \to W$ klar.

Aufgabe 6

a) Die Summe $A+C$ ist nicht definiert, weil die Spaltenanzahl von A und C nicht übereinstimmt. Auch das Produkt CB ist undefiniert, denn bei Matrizenprodukten muss die Anzahl der Spalten des ersten Faktors gleich der Anzahl der Zeilen des zweiten Faktors sein. Alle anderen Ausdrücke können wir berechnen:

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$$3C = \begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 3 & -3i \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3i & -3-5i & 6+6i \\ 1 & 2-3i & 2 \\ 6+i & -12-2i & 14+3i \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3i & -1 \\ 0 & 1 & 1-i \\ 2+i & 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8+3i & 12+2i & -11-i \\ 6+2i & 7+3i & -8+i \\ 0 & 3 & 3-3i \end{pmatrix}$$

$$(A + B)C = \begin{pmatrix} 3 & 2i & 2 \\ 1 & 0 & 3-i \\ 2+i & 7 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+5i & 6 \\ 6-i & 6-2i \\ 2i & -6-7i \end{pmatrix}$$

$$A^*C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2-i \\ -3i & 1 & 4 \\ -1 & 1+i & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4-2i \\ 12 & 8-i \\ -5 & -5-i \end{pmatrix}$$

$$C^T B = \begin{pmatrix} i & 1 & 2 \\ 0 & -i & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 6 & 2+3i \\ -i & 6+i & -2i \end{pmatrix}$$

b) **i)** Es gilt

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot (A\vec{y}) &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3 \\ \alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3 \\ \alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3 \end{pmatrix} \\ &= x_1(\overline{\alpha_{11}y_1 + \alpha_{12}y_2 + \alpha_{13}y_3}) + x_2(\overline{\alpha_{21}y_1 + \alpha_{22}y_2 + \alpha_{23}y_3}) + x_3(\overline{\alpha_{31}y_1 + \alpha_{32}y_2 + \alpha_{33}y_3}) \\ &= \sum_{i=1}^{3} x_i(\overline{\alpha_{i1}y_1} + \overline{\alpha_{i2}y_2} + \overline{\alpha_{i3}y_3}) = \sum_{i=1}^{3} x_i \sum_{j=1}^{3} \overline{\alpha_{ij}y_j} = \sum_{i,j=1}^{3} \overline{\alpha_{ij}}\, x_i\, \overline{y_j}\,.\end{aligned}$$

Insbesondere ist $\vec{x} \cdot (A\vec{y}) \in \mathbb{C}$.

ii) Es gilt

$$\vec{x}^T(A - A^T)\vec{x} = (\vec{x}^T A - \vec{x}^T A^T)\vec{x} = \vec{x}^T A\vec{x} - \vec{x}^T A^T \vec{x}\,. \qquad (*)$$

Wegen $\vec{x}^T A\vec{x} = \vec{x}\cdot(A\vec{x}) \in \mathbb{C}$ ist $\vec{x}^T A\vec{x} = (\vec{x}^T A\vec{x})^T \overset{19.5,6.2)}{=} \vec{x}^T A^T (\vec{x}^T)^T = \vec{x}^T A^T \vec{x}$. Deshalb ergibt sich in $(*)$: 0. Hiermit folgt auch

$$\vec{x}^T(A + A^T)\vec{x} = (\vec{x}^T A + \vec{x}^T A^T)\vec{x} = \vec{x}^T A\vec{x} + \vec{x}^T A^T \vec{x} = 2\vec{x}^T A\vec{x}.$$

c) Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Für $L = (l_{ij})_{i,j=1}^{2} = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ gilt

$$LA = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & l_{11} + 2l_{12} \\ 0 & l_{21} + 2l_{22} \end{pmatrix}.$$

Also gilt $LA = 0$ genau dann, wenn $l_{11} + 2l_{12} = 0$ und $l_{21} + 2l_{22} = 0$ sind. Wir können l_{12} und l_{22} beliebig wählen, etwa $l_{12} = s \in \mathbb{R}$ und $l_{22} = t \in \mathbb{R}$. Es muss nun gelten $l_{11} = -2s$ und $l_{21} = -2t$. Folglich gilt $LA = 0$ genau für Matrizen der Form

$$L = \begin{pmatrix} -2s & s \\ -2t & t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad s, t \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$