

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen
Elektroingenieurwesen und Physik inklusive
Komplexe Analysis und Integraltransformationen
3. Übungsblatt**

Aufgabe 1

Bestimmen Sie (gegebenenfalls in Abhängigkeit von den vorkommenden Parametern) die Zeilennormalform und den Rang der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 4 \\ 4 & -6 & 4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Geben Sie außerdem jeweils eine Basis von $\text{Kern}(A)$, $\text{Bild}(A)$, $\text{Kern}(B)$ und $\text{Bild}(B)$ an.

Aufgabe 2

Bestimmen Sie jeweils alle Lösungen $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5$ von:

a)

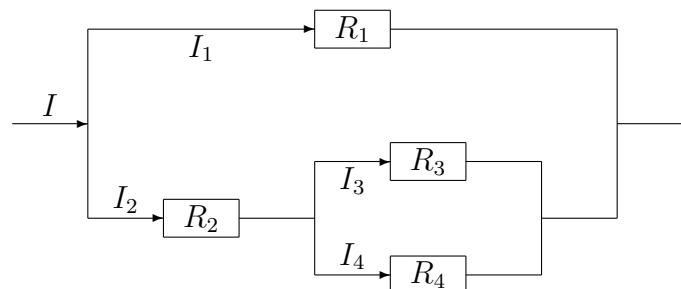
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_4 &= 3 \\ x_3 + 4x_4 &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 3x_4 + x_5 &= 2 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 &= -3 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_4 + 4x_5 &= -1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Gegeben ist die folgende Gleichstromschaltung:



Es gelte $I = 1 [A]$ und $R_1 = R_2 = R_3 = \alpha [\Omega]$ sowie $R_4 = \beta [\Omega]$.

- a) Stellen Sie mit Hilfe der Kirchhoffschen Gesetze ein lineares Gleichungssystem für die Ströme I_1 bis I_4 auf.

- b) Untersuchen Sie in Abhängigkeit von α und β die Lösbarkeit des in a) erhaltenen linearen Gleichungssystems.

Bestätigen Sie dabei, dass das System für physikalisch sinnvolle Werte von α und β (nämlich $\alpha, \beta > 0$) stets eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 4

Im $\mathbb{R}^{(4,4)}$ bzw. $\mathbb{R}^{(3,3)}$ sind die folgenden Matrizen gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie, dass A und B regulär sind. Ist C regulär? Bestimmen Sie A^{-1} , B^{-1} , $(AB)^{-1}$, $(A^T)^{-1}$ sowie $((AB)^T)^{-1}$.

- b) Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme $A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $(AB)\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 5

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,m)}$ soll durch Zeilenoperationen umgeformt werden. Bestimmen Sie für jede mögliche Zeilenumformung eine Matrix B so, dass BA die Matrix ist, welche sich nach Ausführen der Zeilenumformung ergibt.

Aufgabe 6

In S_4 seien die Permutationen $\sigma = (3, 2, 4, 1)$ und $\pi = (4, 3, 2, 1)$ gegeben.

- a) Berechnen Sie $\sigma \circ \pi$ und $\pi \circ \sigma$.
- b) Bestimmen Sie $(\sigma \circ \pi)^{-1}$ und bestätigen Sie, dass $(\sigma \circ \pi)^{-1} = \pi^{-1} \circ \sigma^{-1}$ gilt.
- c) Geben Sie σ als Hintereinanderausführung von Transpositionen an und bestimmen Sie das Vorzeichen $\text{sign}(\sigma)$ von σ .