Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2011
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 4. Übungsblatt

Aufgabe 1

Wir wissen, dass sich die Determinante einer Matrix nicht verändert, wenn wir das Vielfache einer Spalte zu einer anderen Spalte bzw. das Vielfache einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren. Auf diese Weise formen wir die Matrizen nun um und verwenden zudem den Entwicklungssatz.
[Die verwendete Umformung steht jeweils in Klammern hinter dem Gleichheitszeichen.]

$$\det(A) =_{[S_1\to S_1+S_2]} \det\begin{pmatrix}2&1&-1&-1\\0&-1&1&-1\\0&-1&-1&1\\2&1&1&1\end{pmatrix} =_{[Z_4\to Z_4-Z_1]} \det\begin{pmatrix}2&1&-1&-1\\0&-1&1&-1\\0&-1&-1&1\\0&0&2&2\end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} 2\cdot\det\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&-1&1\\0&2&2\end{pmatrix} =_{[Z_2\to Z_2-Z_1]} 2\cdot\det\begin{pmatrix}-1&1&-1\\0&-2&2\\0&2&2\end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } S_1]} 2\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix}-2&2\\2&2\end{pmatrix} = -2\big((-2)\cdot 2-2\cdot 2\big) = 16.$$

Bei der Matrix B gehen wir genauso vor:

$$\det(B) =_{[Z_1\to Z_1+Z_4]} \det\begin{pmatrix}5&5&5&5\\-1&0&1&1\\3&-1&4&0\\4&3&2&1\end{pmatrix} =_{[S_j\to S_j-S_1, j=2,3,4]} \det\begin{pmatrix}5&0&0&0\\-1&1&2&2\\3&-4&1&-3\\4&-1&-2&-3\end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 5\cdot\det\begin{pmatrix}1&2&2\\-4&1&-3\\-1&-2&-3\end{pmatrix} =_{[Z_1\to Z_1+Z_3]} 5\cdot\det\begin{pmatrix}0&0&-1\\-4&1&-3\\-1&-2&-3\end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 5\cdot(-1)\cdot\det\begin{pmatrix}-4&1\\-1&-2\end{pmatrix} = -5(8+1) = -45.$$

Und auch die Matrix C lässt sich so behandeln:

$$\det(C) =_{[Z_1\to Z_1-Z_4]} \det\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&2\\1&0&1&2\\3&1&1&\alpha\end{pmatrix} =_{[S_4\to S_4-S_1]} \det\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&1\\1&0&1&1\\3&1&1&\alpha-3\end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 1\cdot\det\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&\alpha-3\end{pmatrix} =_{[S_3\to S_3-S_1]} \det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\1&1&\alpha-4\end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. nach } Z_1]} 1\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&\alpha-4\end{pmatrix} = \alpha-4-1 = \alpha-5.$$

Man sieht: $\det C \neq 0 \iff \alpha\neq 5$. Daher ist C genau für $\alpha\in\mathbb{C}\setminus\{5\}$ regulär.

Aufgabe 2

Zunächst zur Matrix A: Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3)$. Dieses lautet

$$\det\begin{pmatrix} 22-\lambda & -2 & -4 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[Z_1\to Z_1-Z_2]} \det\begin{pmatrix} 18-\lambda & -18+\lambda & 0 \\ 4 & 16-\lambda & -4 \\ 2 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_1\to S_1+S_2]} \det\begin{pmatrix} 0 & -18+\lambda & 0 \\ 20-\lambda & 16-\lambda & -4 \\ 1 & -1 & 16-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } Z_1]} (18-\lambda)\det\begin{pmatrix} 20-\lambda & -4 \\ 1 & 16-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (18-\lambda)\big((20-\lambda)(16-\lambda)+4\big) = (18-\lambda)\big(\lambda^2 - 36\lambda + 324\big) = -(\lambda-18)^3.$$

Wegen $\chi_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 18$ besitzt die Matrix A nur den Eigenwert 18; dieser hat die algebraische Vielfachheit 3. Der zugehörige Eigenraum $E_A(18)$ ist die Menge aller $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ mit $A\vec{x} = 18\vec{x}$ bzw. $(A - 18E_3)\vec{x} = \vec{0}$, also genau $\text{Kern}(A - 18E_3)$. Zur Berechnung des Kerns von

$$A - 18E_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

verwenden wir Zeilenumformungen

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3\to Z_3-\frac{1}{2}Z_1]{Z_2\to Z_2-Z_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1\to\frac{1}{4}Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und lesen mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks ab

$$E_A(18) = \text{Kern}(A - 18E_3) = \{s\begin{pmatrix} -1/2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid s,t \in \mathbb{C}\} = \text{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Der Eigenwert 18 hat die geometrische Vielfachheit 2, weil der Eigenraum $E_A(18)$ zweidimensional ist. Da die geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwerts 18 nicht übereinstimmen, ist A nicht diagonalisierbar, d.h. es gibt keine reguläre Matrix $S_A \in \mathbb{C}^{(3,3)}$ so, dass $S_A^{-1}AS_A$ eine Diagonalmatrix ist.

Jetzt zur Matrix B: Wir berechnen das zugehörige charakteristische Polynom

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda E_3) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_1\to Z_1+(1-\lambda)Z_3 \\ Z_2\to Z_2+2Z_3}\right]} \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ 0 & -\lambda & 2-2\lambda \\ -1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[\text{Entw. n. } S_1]} -\det\begin{pmatrix} 1 & -\lambda(1-\lambda) \\ -\lambda & 2-2\lambda \end{pmatrix} = -\big(2 - 2\lambda - \lambda^2(1-\lambda)\big) = (\lambda^2-2)(1-\lambda)\,.$$

Wegen $\chi_B(\lambda) = 0 \iff \lambda \in \{1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$ hat die Matrix B die drei Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \sqrt{2}$ und $\lambda_3 = -\sqrt{2}$. Diese haben jeweils die algebraische Vielfachheit 1.
Wir bestimmen nun den Eigenraum $E_B(1)$ zu $\lambda_1 = 1$, also die Menge aller $\vec{x} \in \mathbb{C}^3$ mit $(B - E_3)\vec{x} = \vec{0}$:

$$B - E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1\leftrightarrow Z_3]{Z_2\to Z_2+2Z_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1\to -Z_1,\, Z_2\to -Z_2]{Z_3\to Z_3+Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E_B(1) = \text{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}).$$

Der Eigenwert 1 besitzt die geometrische Vielfachheit 1, weil der zugehörige Eigenraum eindimensional ist.
Schließlich müssen wir noch die zu den beiden Eigenwerten $\lambda_{2,3} = \pm\sqrt{2}$ gehörenden Eigenräume bestimmen. Analoges Vorgehen wie eben ergibt

$$E_B(\sqrt{2}\,) = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 \\ 1 \end{pmatrix}) \qquad \text{und} \qquad E_B(-\sqrt{2}\,) = \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-2 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Die geometrische Vielfachheit von $\sqrt{2}$ bzw. $-\sqrt{2}$ beträgt jeweils 1. Die Matrix B ist diagonalisierbar, weil für jeden Eigenwert von B geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen. Eine reguläre Matrix S so, dass $S^{-1}BS$ Diagonalgestalt hat, erhält man folgendermaßen: Man wähle in jedem Eigenraum eine Basis und schreibe die Basisvektoren als Spalten $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_n$ in eine Matrix S. Ist λ_j der Eigenwert zum Eigenvektor $\vec{s}_j$, so erhält man $BS = SD$, wobei D die Diagonalmatrix mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ auf der Diagonalen ist (die Matrix SD hat die Spalten $\lambda_1\vec{s}_1, \lambda_2\vec{s}_2, \ldots, \lambda_n\vec{s}_n$). Die Matrix S ist regulär und es ist $S^{-1}BS = D$. Definieren wir

$$S := \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2}-2 & -\sqrt{2}-2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{dann gilt} \qquad S^{-1}BS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Die Wahl von S ist nicht eindeutig, so ergibt sich z.B. für

$$\widetilde{S} := \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2}-2 & 0 & -\sqrt{2}-2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}: \qquad \widetilde{S}^{-1}B\widetilde{S} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Wir berechnen das charakteristische Polynom von A: $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_4)$

$$= \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} =_{\left[\substack{Z_3 \to Z_3 + Z_2 \\ Z_4 \to Z_4 - Z_2}\right]} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_2 \to S_2 + S_4]} \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.}Z_4]} (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 4-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$=_{[S_2 \to S_2 - S_3]} (4-\lambda)\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.}Z_3]} (4-\lambda)^2\cdot\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= (4-\lambda)^2\big((3-\lambda)(1-\lambda) - 3\big) = (4-\lambda)^2(\lambda^2 - 4\lambda) = \lambda(\lambda-4)^3.$$

Die Matrix A besitzt also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 0$ (mit algebraischer Vielfachheit 1) und $\lambda_2 = 4$ (mit algebraischer Vielfachheit 3). Wir bestimmen nun die Eigenräume:
Für $\lambda_1 = 0$ müssen wir das Gleichungssystem $(A - 0E_4)\vec{x} = \vec{0}$, also $A\vec{x} = \vec{0}$ lösen:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3 \to Z_3 + Z_2 \\ Z_4 \to Z_4 - Z_2}]{Z_1 \to Z_1 - 3Z_2} \begin{pmatrix} 0 & -8 & -4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_4 \to Z_4 + Z_3]{Z_1 \to Z_1 + 2Z_3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wählen wir $x_4 \in \mathbb{R}$ beliebig, so folgt aus der ersten/letzten Zeile $x_3 = -x_4$, aus der dritten $x_2 = x_4$ und aus der zweiten dann $x_1 = -x_4$. Wir haben also den eindimensionalen Eigenraum

$$E(0) = \{ \begin{pmatrix} -x_4 \\ x_4 \\ -x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} \mid x_4 \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Lin}(\vec{c}_1)\,, \qquad \text{wobei} \quad \vec{c}_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jetzt zu $\lambda_2 = 4$:

$$A - 4E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{Z_3 \to Z_3 - Z_1 \\ Z_4 \to Z_4 + Z_1}]{Z_2 \to Z_2 + Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to -Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des (-1)-Ergänzungstricks lesen wir ab

$$E(4) = \mathrm{Lin}(\vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4)\,, \qquad \vec{c}_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_4 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist als reelle, symmetrische Matrix diagonalisierbar (Alternativ könnte man mit den geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte argumentieren). Da $(\vec{c}_1)$ eine Basis von $E(0)$ und $(\vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4)$ eine Basis von $E(4)$ ist, gilt für die Matrix S mit den Spalten $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3, \vec{c}_4$

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Da $A \in \mathbb{R}^{(4,4)}$ symmetrisch ist, gibt es sogar eine orthogonale Matrix $P \in \mathbb{R}^{(4,4)}$ mit

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Um ein solches P anzugeben, bestimmen wir jeweils eine Orthonormalbasis der Eigenräume. Eine Orthonormalbasis von $E(0)$ ist z.B. gegeben durch $\vec{b}_1 := \frac{1}{\|\vec{c}_1\|}\,\vec{c}_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $E(4)$ verwenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren:

$$\vec{b}_2 := \frac{1}{\|\vec{c}_2\|}\,\vec{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_3 := \vec{c}_3 - \langle \vec{c}_3, \vec{b}_2 \rangle \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_3 := \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\,\vec{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}_4 := \vec{c}_4 - \langle \vec{c}_4, \vec{b}_2 \rangle \vec{b}_2 - \langle \vec{c}_4, \vec{b}_3 \rangle \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b}_4 := \frac{1}{\|\vec{v}_4\|} \vec{v}_4 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Somit bildet $(\vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4)$ eine Orthonormalbasis von $E(4)$.
Besitzt die Matrix P die Spalten $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4$, dann ist P orthogonal (d.h. $P^{-1} = P^T$) und es gilt

$$P^T AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

a) Wir berechnen zunächst die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von A. Für das charakteristische Polynom von A ergibt sich

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =_{[Z_3 \to Z_3 - Z_2]} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & \lambda - 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$
$$=_{[S_3 \to S_2 + S_3]} \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2-\lambda & 3-\lambda \\ 0 & \lambda-1 & 0 \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. } Z_3]} -(\lambda-1) \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= -(\lambda-1)\big((2-\lambda)(3-\lambda) - 2\big) = -(\lambda-1)\big(\lambda^2 - 5\lambda + 4\big) = -(\lambda-1)^2(\lambda-4).$$

Die Eigenwerte von A sind genau die Nullstellen von χ_A, also $1, 4$. Die zugehörigen Eigenräume lauten

$$E(1) = \text{Kern}(A - E_3) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}),$$
$$E(4) = \text{Kern}(A - 4E_3) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \text{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Da $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ symmetrisch ist, ist A diagonalisierbar. Aus dem gleichen Grund gibt es eine orthogonale Matrix $S \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ so, dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat. Um ein solches S zu bestimmen, muss man eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A angeben.

Setze

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in E(4) \qquad \text{sowie} \qquad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in E(1).$$

Da $A \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ symmetrisch ist, stehen Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal aufeinander, also gilt $\vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$. Ist

$$\vec{v}_3 := \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

definiert, so sind $\vec{v}_3 \perp \vec{v}_1$ und $\vec{v}_3 \perp \vec{v}_2$. Wegen $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ folgt, dass die Vektoren $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ linear unabhängig sind und somit eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Aufgrund von $\vec{v}_1 \in E(4)$, $\dim E(4) = 1$ und $\dim E(1) = 2$ ergibt sich $E(1) = \mathrm{Lin}(\vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

Folglich ist eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A gegeben durch

$$\left(\frac{1}{\|\vec{v}_1\|}\vec{v}_1,\ \frac{1}{\|\vec{v}_2\|}\vec{v}_2,\ \frac{1}{\|\vec{v}_3\|}\vec{v}_3\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right).$$

Deshalb ist die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

orthogonal und es gilt

$$S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = 2\vec{x}$ hat die triviale Lösung $\vec{x} = \vec{0}$. Würde $A\vec{x} = 2\vec{x}$ für ein $\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$ gelten, dann wäre 2 ein Eigenwert von A, was aber nach **a)** nicht der Fall ist. Folglich ist $\vec{x} = \vec{0}$ die einzige Lösung von $A\vec{x} = 2\vec{x}$.

Aufgabe 5

Es gilt

$$\det(A - \lambda E) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =_{[\text{Entw.}Z_2]} (\alpha-\lambda)\det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 2 & \alpha-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$
$$=_{[\text{Entw.}Z_1]} (\alpha-\lambda)(-\lambda)\det\begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 2 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = (\alpha-\lambda)^2\lambda^2.$$

Fall 1: $\alpha = 0$. Dann ist $\lambda = 0$ einziger Eigenwert von A mit der algebraischen Vielfachheit 4. Für den zugehörigen Eigenraum $E(0)$ ergibt sich

$$E(0) = \mathrm{Kern}(A - 0E) = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&1&0&2\\0&2&0&0 \end{pmatrix} = \mathrm{Kern}\begin{pmatrix} 1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0 \end{pmatrix} = \mathrm{Lin}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix}\right).$$

Also ist $\dim E(0) \neq 4$ und somit ist A in diesem Fall nicht diagonalisierbar.

Fall 2: $\alpha \neq 0$. Dann sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_2 = \alpha$ jeweils Eigenwerte von A mit der algebraischen Vielfachheit 2. Um $\dim E(0)$ zu ermitteln, könnte man wie im vorigen Fall $E(0)$ explizit angeben und die Dimension ablesen. Alternativ schließen wir aus

$$\dim \mathrm{Bild}(A - 0E) = \mathrm{rang}(A - 0E) = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 0&-\alpha&0&0\\0&\alpha&0&0\\2&1&\alpha&2\\0&2&0&0 \end{pmatrix} = \mathrm{rang}\begin{pmatrix} 0&0&0&0\\0&0&0&0\\2&0&\alpha&2\\0&1&0&0 \end{pmatrix} = 2$$

mit der Dimensionsformel $\dim E(0) = \dim \operatorname{Kern}(A - 0E) = \dim \mathbb{C}^4 - \dim \operatorname{Bild}(A - 0E) = 4 - 2 = 2$. Somit stimmt für den Eigenwert 0 geometrische und algebraische Vielfachheit überein. Ferner ist

$$\dim \operatorname{Bild}(A - \alpha E) = \operatorname{rang}(A - \alpha E) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} -\alpha & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \overset{\alpha \neq 0}{=} \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\alpha \end{pmatrix} = \begin{cases} 3 & \text{für } \alpha \neq 4, \\ 2 & \text{für } \alpha = 4, \end{cases}$$

woraus

$$\dim E(\alpha) = 4 - \begin{cases} 3 & \text{für } \alpha \neq 4, \\ 2 & \text{für } \alpha = 4 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha \neq 4, \\ 2 & \text{für } \alpha = 4 \end{cases}$$

folgt. Also ist nur für $\alpha = 4$ geometrische und algebraische Vielfachheit des Eigenwerts α identisch.

Fazit: A ist genau für $\alpha = 4$ diagonalisierbar.

Aufgabe 6

Das System

$$u' = 8u - 6v,$$
$$v' = 9u - 7v$$

ist äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ 9 & -7 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Wir zeigen, dass A diagonalisierbar ist. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom von A

$$\det(A - \lambda E_2) = \det\begin{pmatrix} 8-\lambda & -6 \\ 9 & -7-\lambda \end{pmatrix} = (8-\lambda)(-7-\lambda) + 9 \cdot 6 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda+1)(\lambda-2).$$

Damit sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 2$ die Eigenwerte von A. Da die 2×2-Matrix A zwei verschiedene Eigenwerte besitzt, ist A diagonalisierbar. Die Eigenräume von A lauten

$$E(-1) = \operatorname{Kern}(A + E_2) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Lin}(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix})$$

und

$$E(2) = \operatorname{Kern}(A - 2E_2) = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 9 & -9 \end{pmatrix} = \operatorname{Kern}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}).$$

Für die Matrix

$$S := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

ergibt sich daher

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =: D,$$

woraus $A = SDS^{-1}$ folgt. Die bekannte Formel für die Inversion einer 2×2-Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad (a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ mit } ad - bc \neq 0)$$

führt auf

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Nun gilt

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = SDS^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

genau dann, wenn

$$S^{-1} \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = DS^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

bzw. wenn

$$\begin{pmatrix} -u' + v' \\ 3u' - 2v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -u + v \\ 3u - 2v \end{pmatrix}$$

erfüllt ist. Sind $\widetilde{u} := -u + v$ und $\widetilde{v} := 3u - 2v$, also $\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} := S^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widetilde{u}' \\ \widetilde{v}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} \qquad &\iff \qquad \widetilde{u}' = -\widetilde{u} \ \text{ und } \ \widetilde{v}' = 2\widetilde{v} \\ &\iff \qquad \widetilde{u}(x) = c_1 e^{-x} \ \text{ und } \ \widetilde{v} = c_2 e^{2x} \quad \text{für } c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \qquad \iff \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\widetilde{u} + \widetilde{v} \\ 3\widetilde{u} + \widetilde{v} \end{pmatrix}$$

sind

$$\begin{aligned} u(x) &= 2\widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) = 2c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \\ v(x) &= 3\widetilde{u}(x) + \widetilde{v}(x) = 3c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x} \end{aligned}$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ die Lösungen des Systems (1).