Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2011
12.05.2011

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Gegeben sei die reelle, symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \\ a_3 & a_5 & a_6 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die folgende Äquivalenz besteht:

$$A \text{ ist positiv definit} \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1 > 0\,, \quad \det\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} > 0\,, \quad \det(A) > 0\,.$$

Geben Sie ein entsprechendes Kriterium für „negativ definit“ an.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, gegebenenfalls in Abhängigkeit von auftretenden Konstanten, ob die folgenden Matrizen positiv definit sind.

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = (b_{kl})_{k,l=1,\dots,n}\,, \quad \text{wobei } b_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 2, & |k-l| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 3

Definition: Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ mit $A^*A = E_n$ heißt *unitär*.

a) Begründen Sie, dass eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{(n.n)}$ genau dann unitär ist, wenn ihre Spalten eine Orthonormalbasis des $\mathbb{C}^n$ bilden.

b) Ergänzen Sie einen dritten Vektor so, dass die Vektoren die Spalten einer unitären Matrix bilden:

$$\begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix}.$$

c) Sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ eine unitäre Matrix. Zeigen Sie:

i) $\langle A\vec{z}, A\vec{z}\rangle = \langle \vec{z}, \vec{z}\rangle$ für alle $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$.

ii) Alle Eigenwerte von A haben den Betrag 1.

Hinweis: Mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wird das Standardskalarprodukt im $\mathbb{C}^n$ bezeichnet.

— bitte wenden —

Aufgabe 4

Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$ sei die *Niveaulinie von f zum Niveau c* durch

$$N_c(f) := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = c\big\}$$

definiert. Veranschaulichen Sie sich die folgenden Funktionen, indem Sie die Niveaulinien N_c für $c \in \{-2,-1,0,1,2\}$ skizzieren:

$$f(x,y) = x^2 + y^2\,, \qquad g(x,y) = xy\,, \qquad h(x,y) = y^2 - x^2\,.$$

Aufgabe 5

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei durch $f(0,0) := 1$ und

$$f(x,y) := \frac{x^2+y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

für $(x,y) \neq (0,0)$ gegeben. Begründen Sie, dass dann die beiden Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\Big(\lim_{y\to 0} f(x,y)\Big) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big)$$

existieren und mit $f(0,0)$ übereinstimmen, obwohl f in $(0,0)$ unstetig ist.

b) Untersuchen Sie jeweils, ob $f(x,y)$ für $(x,y) \to (0,0)$ konvergiert, und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

i) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

ii) $f(x,y) = \dfrac{xy}{e^{x^2}-1}$

Aufgabe 6

Skizzieren Sie die folgenden Kurven und berechnen Sie $\int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$ bzw. $\int_0^{2\pi} |z'(\varphi)|\,d\varphi$.

a) $\vec{r}\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \vec{r}(t) := \big(t - \sin t,\ 1 - \cos t\big)$

b) $z\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C},\ \varphi \mapsto z(\varphi) := \varphi e^{i\varphi}$

Hinweis zur Bestimmung der Integrale: **a)** Schreiben Sie $\cos t = \cos(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t)$ und verwenden Sie das Additionstheorem für Cosinus. **b)** Es gilt $\int \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \frac{1}{2}(\operatorname{Arsinh}\varphi + \varphi\sqrt{1+\varphi^2})$.