Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2011
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 1

Die reelle Matrix A ist symmetrisch. Es gibt daher ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. (Es müssen nicht unbedingt drei verschiedene Eigenwerte sein.) Wir wissen, dass $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$ gilt.
Wir halten außerdem noch folgendes fest: Ist A positiv definit, so gilt dies auch für $A_1 := \left(\begin{smallmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{smallmatrix}\right)$, denn für beliebige $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ ist dann

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_4 & a_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} > 0\,.$$

Zum Beweis der Äquivalenz: Mit A ist auch A_1 positiv definit, und aus der Vorlesung wissen wir, dass dies äquivalent ist zu $a_1 > 0$ und $\det(A_1) > 0$ (vgl. Satz 2 in Kapitel 25). Da A positiv definit ist, müssen alle Eigenwerte > 0 sein, d. h. es gilt auch $\det(A) = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$.
Ist umgekehrt die rechte Seite der zu beweisenden Äquivalenz erfüllt, so folgt, dass A_1 positiv definit ist und zudem $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$ gilt. Angenommen, A sei nicht positiv definit. Dann muss mindestens ein Eigenwert $\leqslant 0$ sein. Wegen $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 > 0$ bedeutet das aber: Zwei der Eigenwerte müssen < 0 sein; o.B.d.A. seien dies λ_1 und λ_2. Für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ gilt dann (weil $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ ein Orthonormalsystem ist)

$$\begin{aligned}(\alpha\vec{c}_1 + \beta\vec{c}_2)^T A(\alpha\vec{c}_1 + \beta\vec{c}_2) &= (\alpha\vec{c}_1 + \beta\vec{c}_2)^T(\alpha\lambda_1\vec{c}_1 + \beta\lambda_2\vec{c}_2) \\ &= \alpha^2\lambda_1\vec{c}_1^{\,T}\vec{c}_1 + \alpha\beta\lambda_2\vec{c}_1^{\,T}\vec{c}_2 + \alpha\beta\lambda_1\vec{c}_2^{\,T}\vec{c}_1 + \beta^2\lambda_2\vec{c}_2^{\,T}\vec{c}_2 = \alpha^2\lambda_1 + \beta^2\lambda_2 < 0\,.\end{aligned}$$

Jetzt wählen wir $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$ derart, dass der Vektor $\vec{x} := \alpha\vec{c}_1 + \beta\vec{c}_2$ als dritte Komponente 0 hat. Es gilt also $\vec{x} = (\mu, \nu, 0)$ mit gewissen $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, und für $\vec{x}_1 := (\mu, \nu)$ ergibt sich $\vec{x}_1^{\,T} A_1 \vec{x}_1 = \vec{x}^{\,T} A \vec{x} < 0$, im Widerspruch zur positiven Definitheit von A_1. Damit ist die Äquivalenz gezeigt.

Als Kriterium für negative Definitheit erhalten wir:

$$\begin{aligned}&A \text{ ist negativ definit} \iff -A \text{ ist positiv definit} \iff \\ &\quad -a_1 > 0,\ \det(-A_1) > 0,\ \det(-A) > 0 \iff a_1 < 0,\ \det(A_1) > 0,\ \det(A) < 0\end{aligned}$$

Das Vorzeichen der Determinanten muss also, mit $-$ beginnend, abwechseln.

Bemerkung: Die entsprechenden Aussagen kann man auch für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ zeigen: Eine symmetrische Matrix $A = (a_{jk})_{jk} \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist positiv definit genau dann, wenn alle *Hauptunterdeterminanten von* A positiv sind, d.h. wenn

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix} > 0$$

für alle $m = 1, 2, \dots, n$ gilt.

Aufgabe 2

Für die symmetrische Matrix A_β verwenden wir das Kriterium aus Aufgabe 1. Es gilt

$$1 > 0 \qquad \text{und} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0\,;$$

die ersten beiden Hauptunterdeterminanten sind also positiv. Die Matrix A_β ist somit genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante > 0 ausfällt. Wegen

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} =_{[Z_2 \to Z_2 + 2Z_1]} \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} =_{[\text{Entw. n. } S_1]} \det\begin{pmatrix} 4 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = 4 - \beta^2$$

ergibt sich: A_β ist positiv definit $\iff 0 < 4 - \beta^2 \iff |\beta| < 2 \iff -2 < \beta < 2$.

Nun zur Matrix B: Für $n = 1$ ist $B = (1)$ positiv definit. Im Fall $n \geqslant 2$ ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & 1 & 2 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n,n)}.$$

Für $\vec{x} := \vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$B\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad \vec{x}^T B\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0,$$

während sich für $\vec{y} := \vec{e}_1 - \vec{e}_2 = (1, -1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$B\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad \vec{y}^T B\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

ergibt. Somit ist die Matrix B indefinit.

Aufgabe 3

a) Vorüberlegung: Sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ eine Matrix. Bezeichnet $\vec{a}_j$ die j-te Spalte von A, so gilt

$$\begin{aligned} A^*A &= \begin{pmatrix} \overline{\vec{a}_1}^T \\ \overline{\vec{a}_2}^T \\ \vdots \\ \overline{\vec{a}_n}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\vec{a}_1}^T \vec{a}_1 & \overline{\vec{a}_1}^T \vec{a}_2 & \cdots & \overline{\vec{a}_1}^T \vec{a}_n \\ \overline{\vec{a}_2}^T \vec{a}_1 & \overline{\vec{a}_2}^T \vec{a}_2 & \cdots & \overline{\vec{a}_2}^T \vec{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{\vec{a}_n}^T \vec{a}_1 & \overline{\vec{a}_n}^T \vec{a}_2 & \cdots & \overline{\vec{a}_n}^T \vec{a}_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \vec{a}_1, \vec{a}_1 \rangle & \langle \vec{a}_2, \vec{a}_1 \rangle & \cdots & \langle \vec{a}_n, \vec{a}_1 \rangle \\ \langle \vec{a}_1, \vec{a}_2 \rangle & \langle \vec{a}_2, \vec{a}_2 \rangle & \cdots & \langle \vec{a}_n, \vec{a}_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \vec{a}_1, \vec{a}_n \rangle & \langle \vec{a}_2, \vec{a}_n \rangle & \cdots & \langle \vec{a}_n, \vec{a}_n \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In A^*A ist also $\langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle$ das Element in der k-ten Zeile und j-ten Spalte. Hiermit erhalten wir

$$A \text{ ist unitär} \iff A^*A = E_n \iff \langle \vec{a}_j, \vec{a}_k \rangle = \delta_{jk} \text{ für alle } j,k \in \{1,2,\dots,n\}$$
$$\overset{\dim \mathbb{C}^n = n}{\iff} (\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n) \text{ ist Orthonormalbasis des } \mathbb{C}^n.$$

b) Die beiden gegebenen Vektoren haben Norm 1 und sind orthogonal zueinander. Wir suchen nun einen Vektor $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ mit

$$\langle \vec{z}, \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \rangle = 0 \qquad \text{und} \qquad \langle \vec{z}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ -i/2 \\ (1-i)/2 \end{pmatrix} \rangle = 0\,.$$

Komponentenweise geschrieben (und mit $\sqrt{2}$ bzw. 2 durchmultipliziert) heißt das

$$-iz_1 - z_2 = 0 \qquad \text{und} \qquad z_1 + iz_2 + (1+i)z_3 = 0\,.$$

Die erste Gleichung können wir mit $z_1 = 1$ und $z_2 = -i$ erfüllen. Die zweite Gleichung liefert dann $2 + (1+i)z_3 = 0$, also $z_3 = -2/(1+i) = -1+i$. Den so gefundenen Vektor $\vec{z}$ müssen wir nun noch normieren, also durch seine Norm teilen. Wir ergänzen daher den Vektor

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1+i \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Der zu ergänzende Vektor ist nicht eindeutig bestimmt; man kann ihn mit beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{C}$, für die $|c| = 1$ gilt, multiplizieren.

c) Im folgenden sei $A \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ eine unitäre Matrix.

i) Sei $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$. Dann gilt

$$\|A\vec{z}\|^2 = \langle A\vec{z}, A\vec{z} \rangle = (\overline{A}\,\overline{\vec{z}})^T A\vec{z} = \overline{\vec{z}}^T \overline{A}^T A\vec{z} = \overline{\vec{z}}^T (A^*A)\vec{z} = \overline{\vec{z}}^T \vec{z} = \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = \|\vec{z}\|^2.$$

ii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A und $\vec{z} \in \mathbb{C}^n \setminus \{\vec{0}\}$ ein zugehöriger Eigenvektor. Dann erhält man mit **i)**

$$\|\vec{z}\|^2 = \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = \langle A\vec{z}, A\vec{z} \rangle = \langle \lambda\vec{z}, \lambda\vec{z} \rangle = \lambda \langle \vec{z}, \lambda\vec{z} \rangle = \lambda\overline{\lambda} \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = |\lambda|^2 \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = |\lambda|^2 \|\vec{z}\|^2.$$

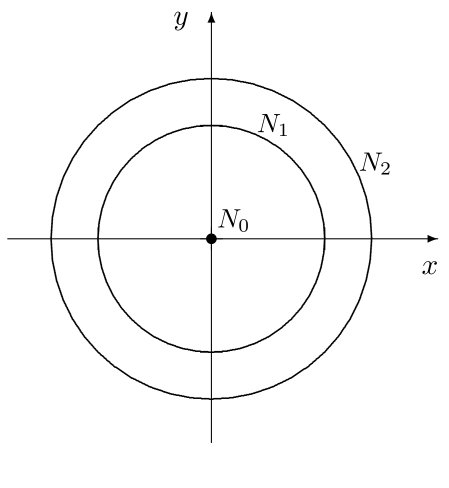
Division mit $\|\vec{z}\|^2 \neq 0$ liefert $|\lambda|^2 = 1$, also $|\lambda| = 1$.

Aufgabe 4

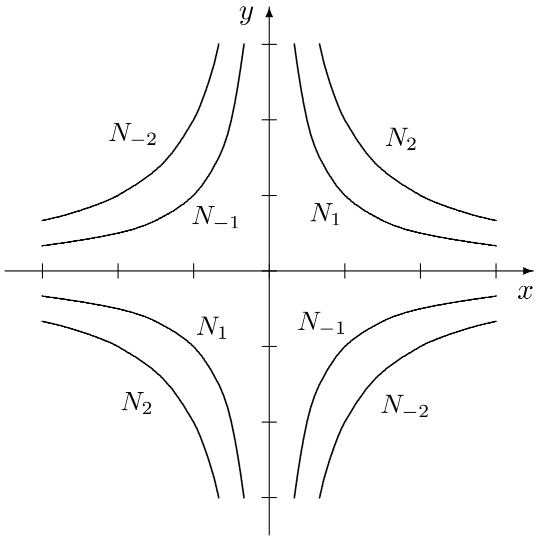
• Die Niveaulinie $N_c(f)$ ergibt sich aus der Gleichung $f(x,y) = c$, also

$$x^2 + y^2 = c\,.$$

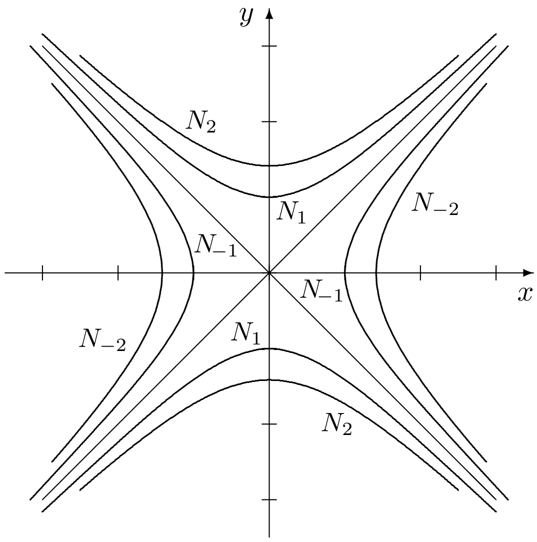
Für $c < 0$ erhalten wir die leere Menge, für $c = 0$ nur den Nullpunkt und für $c > 0$ einen Kreis um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{c}$. Dies ergibt die folgende Skizze, wobei der kleinere Kreis den Radius 1 und der größere den Radius $\sqrt{2}$ hat:



• Die Gleichung $xy = c$ hat für $c = 0$ die Lösungsmenge $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ oder } y = 0\}$. Für $c \neq 0$ erhält man das Schaubild der Funktion $y = c/x$, die Niveaulinien sind also Hyperbeln. Die Skizze sieht wie folgt aus, wobei N_0 aus den beiden Achsen besteht:



• Hier erhalten wir die Gleichung $y^2 = c + x^2$, also $|y| = \sqrt{c + x^2}$ bzw. $y = \pm\sqrt{c + x^2}$. Es ergibt sich das folgende Bild, wobei N_0 aus den beiden Winkelhalbierenden besteht:



Bemerkung: Wegen $h(x, y) = (y - x)(y + x)$ erhalten wir das gleiche Bild wie bei der Funktion g, allerdings gedreht und mit anderen Längen.

Aufgabe 5

a) Will man den ersten der beiden angegebenen Grenzwerte, also

$$\lim_{x \to 0} h(x) \qquad \text{mit} \quad h(x) := \lim_{y \to 0} f(x, y)\,,$$

bestimmen, so muss man $h(x)$ nur für $x \neq 0$ betrachten. Für jedes $x \neq 0$ gilt

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} \xrightarrow{y \to 0} \frac{x^2 + 0}{0 + (x - 0)^2} = 1\,,$$

d. h. man hat $h(x) = 1$ für alle $x \neq 0$. Also ergibt sich

$$\lim_{x \to 0} \Big(\lim_{y \to 0} f(x, y) \Big) = \lim_{x \to 0} h(x) = 1 = f(0, 0)\,,$$

und wegen $f(x,y) = f(y,x)$ erhält man dann auch

$$\lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(x,y)\Big) = \lim_{y\to 0}\Big(\lim_{x\to 0} f(y,x)\Big) = \lim_{y\to 0} h(y) = 1 = f(0,0)\,.$$

Trotzdem ist die Funktion f im Punkt $(0,0)$ unstetig, denn es gilt $(\frac{1}{k},\frac{1}{k}) \xrightarrow{k\to\infty} (0,0)$ und

$$f(\tfrac{1}{k},\tfrac{1}{k}) = \frac{1/k^2 + 1/k^2}{1/k^4 + 0} = 2k^2 \xrightarrow{k\to\infty} \infty\,.$$

b) **i)** Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y^2+1}+1}{\sqrt{x^2+y^2+1}+1} = \frac{(x^2+y^2)(\sqrt{x^2+y^2+1}+1)}{(x^2+y^2+1)-1}$$
$$= \sqrt{x^2+y^2+1}+1$$

und damit ergibt sich unmittelbar

$$f(x,y) \xrightarrow{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{0^2+0^2+1}+1 = 2\,.$$

ii) Für $x \neq 0$ gilt

$$f(x,0) = 0 \xrightarrow{x\to 0} 0 \qquad \text{und} \qquad f(x,x) = \frac{x^2}{e^{x^2}-1} \xrightarrow{x\to 0} \lim_{t\to 0}\frac{t}{e^t-1} = 1\,,$$

d.h. bei unterschiedlicher Annäherung an den Nullpunkt erhält man verschiedene Werte. Folglich existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ nicht.

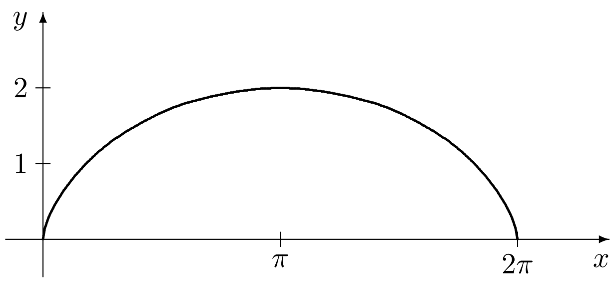
Aufgabe 6

a) Wegen

$$\|\vec{r}\,'(t)\|^2 = \left\|\begin{pmatrix}1-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\right\|^2 = (1-\cos t)^2 + \sin^2 t = 1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t$$
$$= 2 - 2\cos t = 2\big(1-\cos(\tfrac{1}{2}t+\tfrac{1}{2}t)\big) = 2\big(1-\cos^2(\tfrac{1}{2}t)+\sin^2(\tfrac{1}{2}t)\big) = 4\sin^2(\tfrac{1}{2}t)\,.$$

ist

$$\int_0^{2\pi}\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} 2|\sin(\tfrac{1}{2}t)|\,dt = 2\int_0^{2\pi}\sin(\tfrac{1}{2}t)\,dt = -4\cos(\tfrac{1}{2}t)\Big|_{t=0}^{2\pi} = 8\,.$$



Bemerkungen: (1) Der Wert des Integrals $\int_0^{2\pi}\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$ ist die Länge $L(\vec{r})$ der Kurve $\vec{r}$.

(2) Die Kurve $\vec{r}$ heißt *Zykloide*. Sie ist die Bahn, die ein Kreispunkt beim Abrollen eines Kreises auf einer Geraden beschreibt.

b) Hier befinden wir uns in der komplexen Zahlenebene $\mathbb{C}$, welche wir als $\mathbb{R}^2$ auffassen. Wegen $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ist die Kurve $\vec{r}(\varphi) = (\varphi\cos\varphi, \varphi\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, in $\mathbb{R}^2$ gemeint.

Mit

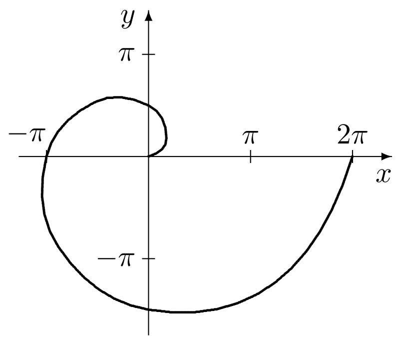
$$\vec{r}\,'(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi - \varphi\sin\varphi \\ \sin\varphi + \varphi\cos\varphi \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\vec{r}\,'(\varphi)\|^2 &= (\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)^2 + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)^2 \\ &= \cos^2\varphi - 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\cos^2\varphi \\ &= 1 + \varphi^2 \end{aligned}$$

und daher

$$\int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(\varphi)\|\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{1+\varphi^2} + \sqrt{1+\varphi^2}}{2}\,d\varphi$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2} \right) d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \frac{\varphi^2}{\sqrt{1+\varphi^2}} + \sqrt{1+\varphi^2} \right) d\varphi$$
$$= \frac{1}{2}\left(\operatorname{Arsinh}\varphi + \varphi\sqrt{1+\varphi^2} \right)\Bigg|_{\varphi=0}^{2\pi} = \frac{1}{2}\operatorname{Arsinh}(2\pi) + \pi\sqrt{1+4\pi^2}\,.$$



Bemerkung: Diese Kurve heißt *Archimedische Spirale*. Wir haben eben nachgerechnet, dass sich für ihre Länge $L(z) = \int_0^{2\pi} |z'(\varphi)|\,d\varphi = \int_0^{2\pi} \|\vec{r}\,'(\varphi)\|\,d\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{Arsinh}(2\pi) + \pi\sqrt{1+4\pi^2}$ ergibt.