Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2011
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Für $-1 < t < 1$ gilt

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t^2} \\ 1 \\ -t/\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}.$$

Für $t_0 \in (-1,1)$ ist daher

$$\vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}\,'(t_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{Arcsin} t_0 \\ t_0 \\ \sqrt{1-t_0^2} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t_0^2} \\ 1 \\ -t_0/\sqrt{1-t_0^2} \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$

eine Parameterdarstellung der Tangente im Punkt $\vec{r}(t_0)$.

b) Für $t \in [-1,1]$ haben wir

$$g(t) := \int_{-1}^{t} \|\vec{r}\,'(\tau)\|\, d\tau = \int_{-1}^{t} \sqrt{\frac{2}{1-\tau^2}}\, d\tau = \sqrt{2}\operatorname{Arcsin} \tau\Big|_{\tau=-1}^{t} = \sqrt{2}\,(\operatorname{Arcsin} t + \tfrac{\pi}{2}).$$

Folglich hat die Kurve $\vec{r}$ die Länge $L(\vec{r}\,) = g(1) = \sqrt{2}\,\pi$. Wegen

$$g(t) = s \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} = \operatorname{Arcsin} t \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \tfrac{\pi}{2})$$

ist $g^{-1}\colon [0, \sqrt{2}\,\pi] \to [-1,1]$, $s \mapsto g^{-1}(s) = \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s)$. Damit lautet die Parametrisierung von $\vec{r}$ bezüglich der Bogenlänge (oder auch natürliche Darstellung von $\vec{r}$)

$$\vec{\varrho}(s) = \vec{r}\,(g^{-1}(s)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{2} \\ -\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s) \\ \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s) \end{pmatrix}, \qquad s \in [0, \sqrt{2}\,\pi].$$

Aufgabe 2

Es handelt sich um den Schnitt der Oberfläche der Kugel um $(0,0,0)$ mit Radius 1 und der Ebene $x + z = 1$; dies ist ein Kreis. Setzen wir $z = 1 - x$ in die Kugelgleichung ein, so erhalten wir

$$x^2 + y^2 + (1-x)^2 = 1, \quad \text{also} \quad 2x^2 - 2x + y^2 = 0.$$

Wir dividieren durch 2 und nehmen eine quadratische Ergänzung vor:

$$(x - \tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{1}{2})^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{2}}\,y)^2 = 0.$$

Bei dieser Gleichung parametrisieren wir nun wie folgt:

$$x - \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2}\cos t, \qquad \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,y = \tfrac{1}{2}\sin t \qquad (t \in [0, 2\pi]).$$

Dann haben wir $x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t$, $y = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin t$ und es folgt $z = 1 - x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos t$. Damit haben wir eine eine Parametrisierung der Menge bestimmt:

$$\vec{r}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \cos t \\ \sqrt{2}\,\sin t \\ 1 - \cos t \end{pmatrix} \qquad (t \in [0, 2\pi]).$$

Der Tangentialvektor im Punkt $\vec{r}(t)$ lautet $\vec{r}\,'(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \sqrt{2}\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. Für die Bogenlänge ergibt sich

$$g(t) := \int_0^t \|\vec{r}\,'(\tau)\|\, d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{\sin^2\tau + 2\cos^2\tau + \sin^2\tau}\, d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \sqrt{2}\, d\tau = t/\sqrt{2} \qquad (t \in [0, 2\pi]),$$

also gilt $L(\vec{r}) = g(2\pi) = \sqrt{2}\pi$. Wegen $g^{-1}(s) = \sqrt{2}\, s$ für $s \in [0, \sqrt{2}\,\pi]$ ist die Darstellung von $\vec{r}$ bezüglich der Bogenlänge gegeben durch

$$\vec{\varrho}(s) = \vec{r}\,(g^{-1}(s)) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 + \cos(\sqrt{2}\, s) \\ \sqrt{2}\,\sin(\sqrt{2}\, s) \\ 1 - \cos(\sqrt{2}\, s) \end{pmatrix} \qquad (s \in [0, \sqrt{2}\,\pi]).$$

Aufgabe 3

a) Die partielle Ableitung von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ nach x im Punkt $\vec{x}_0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Richtungsableitung von f in $\vec{x}_0$ in Richtung des ersten Einheitsvektors $\vec{e}_1 = (1, 0)$, also

$$\begin{aligned} D_1 f(\vec{x}_0) &:= D_{\vec{e}_1} f(\vec{x}_0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_1) - f(\vec{x}_0)\big) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f((x,y) + t(1,0)) - f(x,y)\big) \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(f(x+t, y) - f(x,y)\big). \end{aligned}$$

Für festes $y \in \mathbb{R}$ ist dies gerade der Differenzenquotient der Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, y)$. Um die partielle Ableitung von f nach x zu berechnen, können wir also $f(x, y)$ nach x differenzieren, wobei wir y als eine Konstante betrachten.

Entsprechendes erhalten wir für die partielle Ableitung nach y.

Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind

$$D_1 f(x,y) = 3x^2 - 4xy^2 + 4y^3 \qquad \text{und} \qquad D_2 f(x,y) = -4x^2 y + 12xy^2 + 4y^3\,.$$

Daraus ergibt sich für die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} D_1^2 f(x,y) &= 6x - 4y^2\,, & D_2^2 f(x,y) &= -4x^2 + 24xy + 12y^2\,, \\ D_2 D_1 f(x,y) &= -8xy + 12y^2\,, & D_1 D_2 f(x,y) &= -8xy + 12y^2\,. \end{aligned}$$

Bemerkung: Dass $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$ gilt, war wegen des Satzes von Schwarz schon vorher klar, denn die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist zweimal stetig differenzierbar.

b) Hier haben wir

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= 2xe^{xy} + (x^2 + y^2)ye^{xy} = (x^2 y + 2x + y^3)e^{xy}\,, \\ D_2 f(x,y) &= 2ye^{xy} + (x^2 + y^2)xe^{xy} = (x^3 + xy^2 + 2y)e^{xy}\,. \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung lauten

$$\begin{aligned} D_1^2 f(x,y) &= (2xy + 2)e^{xy} + (x^2 y + y^3 + 2x)ye^{xy} = (x^2y^2 + 4xy + y^4 + 2)e^{xy}\,, \\ D_2^2 f(x,y) &= (2xy + 2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)xe^{xy} = (x^4 + x^2y^2 + 4xy + 2)e^{xy}\,, \\ D_1 D_2 f(x,y) &= (3x^2 + y^2)e^{xy} + (x^3 + xy^2 + 2y)ye^{xy} = (x^3 y + 3x^2 + xy^3 + 3y^2)e^{xy} \\ &= D_2 D_1 f(x,y)\,. \end{aligned}$$

Nach Definition gilt für die Richtungsableitung von f im Punkt $\vec{x}_0 = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ in Richtung $\vec{v} = (v_1, v_2) = (1, 1)$

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{v}} f(x,y) &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(\vec{x}_0 + t\vec{v}) - f(\vec{x}_0)\Big) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(f(x+tv_1, y+tv_2) - f(x,y)\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big((x+tv_1)^2 + (y+tv_2)^2\big)e^{(x+tv_1)(y+tv_2)} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big(x^2 + 2txv_1 + t^2v_1^2 + y^2 + 2tyv_2 + t^2v_2^2\big)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\big(x^2 + y^2 + 2t(xv_1 + yv_2) + t^2(v_1^2 + v_2^2)\big)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - (x^2+y^2)e^{xy}\Big) \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big((x^2+y^2)e^{xy}\big(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1\big) + 2t(xv_1+yv_2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} \\
&\qquad\qquad + t^2(v_1^2+v_2^2)e^{xy}e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2}\Big).
\end{aligned}
$$

Zur Berechnung von $\frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1)$ setzen wir $\alpha := yv_1 + xv_2$ und $\beta := v_1v_2$ und betrachten die durch $g(t) := e^{\alpha t + \beta t^2}$ gegebene Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann ist g differenzierbar auf $\mathbb{R}$ mit $g'(t) = (\alpha + 2\beta t)e^{\alpha t + \beta t^2}$. Nun gilt

$$
\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(e^{t(yv_1+xv_2)}e^{t^2v_1v_2} - 1) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(g(t) - g(0)) = g'(0) = \alpha = yv_1 + xv_2.
$$

Also erhalten wir

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{v}} f(x,y) &= (x^2+y^2)e^{xy}(yv_1 + xv_2) + 2(xv_1 + yv_2)e^{xy} \cdot 1 + 0 \\
&= e^{xy}\big((x^2+y^2)(y+x) + 2(x+y)\big) \\
&= e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2).
\end{aligned}
$$

Die Richtungsableitung $D_{\vec{v}} f$ kann man auch eleganter bestimmen: Da die partiellen Ableitungen $D_1 f, D_2 f$ von f stetig sind, ist f differenzierbar. Deshalb gilt nach Satz 1 in 30.4 für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{v}} f(x,y) &= f'(x,y)\,\vec{v} = \begin{pmatrix} D_1 f(x,y) & D_2 f(x,y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = e^{xy}\begin{pmatrix} x^2y + 2x + y^3 & x^3 + xy^2 + 2y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= e^{xy}\,(x^2y + 2x + y^3 + x^3 + xy^2 + 2y) = e^{xy}(x+y)(x^2+y^2+2).
\end{aligned}
$$

c) Für $x, y \in \mathbb{R}$ und $z \in (0, \infty)$ sind

$$
D_1 f(x,y,z) = e^y/z\,, \qquad D_2 f(x,y,z) = xe^y/z\,, \qquad D_3 f(x,y,z) = -xe^y/z^2\,.
$$

Weiter haben wir

$$
D_1^2 f(x,y,z) = 0\,, \qquad D_2^2 f(x,y,z) = xe^y/z\,, \qquad D_3^2 f(x,y,z) = 2xe^y/z^3\,.
$$

Und schließlich noch die gemischten Ableitungen zweiter Ordnung:

$$
\begin{aligned}
D_2 D_1 f(x,y,z) &= e^y/z = D_1 D_2 f(x,y,z)\,, \\
D_3 D_1 f(x,y,z) &= -e^y/z^2 = D_1 D_3 f(x,y,z)\,, \\
D_3 D_2 f(x,y,z) &= -xe^y/z^2 = D_2 D_3 f(x,y,z)\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 4

Da die Jakobimatrix von $\vec{f}$, deren Komponentenfunktionen wir mit f_1, f_2, f_3 bezeichnen, an der Stelle $(r, \phi, z) \in (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R}$

$$
J_{\vec{f}}(r,\phi,z) = \begin{pmatrix} D_1 f_1(r,\phi,z) & D_2 f_1(r,\phi,z) & D_3 f_1(r,\phi,z) \\ D_1 f_2(r,\phi,z) & D_2 f_2(r,\phi,z) & D_3 f_2(r,\phi,z) \\ D_1 f_3(r,\phi,z) & D_2 f_3(r,\phi,z) & D_3 f_3(r,\phi,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & r\cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
$$

lautet, erhält man $\det(J_{\vec{f}}(r,\phi,z)) =_{[\text{Entw. } S3]} 1 \cdot \det\left(\begin{smallmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{smallmatrix}\right) = r(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r$.

Bemerkung: Die Funktion $\vec{f}$ bildet die Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) eines Punktes im $\mathbb{R}^3$ auf seine kartesischen Koordinaten ab.

Aufgabe 5

a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Stetigkeit von f in $(0,0)$: Gilt $(0,0) \neq (x_k, y_k) \to (0,0)$, so folgt $m_k := \max\{|x_k|, |y_k|\} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, und dies liefert dann

$$|f(x_k, y_k)| \leqslant \frac{|y_k^3| + |x_k^2 y_k|}{x_k^2 + y_k^2} \leqslant \frac{m_k^3 + m_k^3}{m_k^2} = 2m_k \xrightarrow{k\to\infty} 0\,.$$

Das bedeutet $f(x_k, y_k) \to 0 = f(0,0)$, womit die Stetigkeit von f auf ganz $\mathbb{R}^2$ bewiesen ist.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ erhalten wir mit Hilfe der Quotientenregel

$$D_1 f(x,y) = \frac{-2xy(x^2+y^2) - (y^3 - x^2 y)2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$D_2 f(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2) - (y^3 - x^2 y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^2y^2 - x^4 + y^4}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Im Punkt $(0,0)$ dagegen müssen wir auf die Definition der partiellen Ableitung zurückgehen:

$$D_1 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0-0}{t} = 0$$

und

$$D_2 f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \cdot \frac{t^3 - 0}{0 + t^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1\,.$$

c) Wegen

$$D_1 f(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}) = -\frac{4k^{-4}}{(k^{-2} + k^{-2})^2} = -1 \xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 0 = D_1 f(0,0)$$

und

$$D_2 f(\tfrac{1}{k}, 0) = \frac{0 - k^{-4} + 0}{(k^{-2} + 0)^2} = -1 \xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 1 = D_2 f(0,0)$$

sind die partiellen Ableitungen von f in $(0,0)$ nicht stetig.

d) Es sei $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine beliebige Richtung. Dann gilt

$$\begin{aligned} D_{\vec{v}} f(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0) + h\vec{v}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(hv_2)^3 - (hv_1)^2 hv_2}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 v_2^3 - h^3 v_1^2 v_2}{h^3(v_1^2 + v_2^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}\,. \end{aligned}$$

Dies soll nun mit

$$(\nabla f(0,0)) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2$$

verglichen werden. Es gilt

$$\frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = v_2 \iff v_2^3 - v_1^2 v_2 = v_2(v_1^2 + v_2^2) \iff 2v_1^2 v_2 = 0\,.$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ist.

e) Nicht für alle Richtungen $\vec{v}$ gilt die Gleichung $D_{\vec{v}} f(0,0) = (\nabla f(0,0)) \cdot \vec{v}$. Folglich kann die Funktion f in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein, denn sonst müsste diese Gleichung für alle Richtungen $\vec{v}$ gelten.

Da die partiellen Ableitungen von f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig sind, ist f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig partiell differenzierbar, also auch differenzierbar und für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$f'(x,y) = \big(\nabla f(x,y)\big)^T = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} -4xy^3 & -x^4 + 4x^2y^2 + y^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(1,2)}.$$

Aufgabe 6

Wir bestimmen zunächst $f'(x_0, y_0)$. Da f in (x_0, y_0) differenzierbar ist, gilt

$$f'(x_0, y_0)\vec{u} = D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = -1 \qquad \text{und} \qquad f'(x_0, y_0)\vec{v} = D_{\vec{v}} f(x_0, y_0) = 2\,.$$

Setzen wir abkürzend $\alpha := D_1 f(x_0, y_0)$ und $\beta := D_2 f(x_0, y_0)$, so ist $f'(x_0, y_0) = (\alpha \;\; \beta)$, also $f'(x_0, y_0)\vec{u} = \alpha + 2\beta$ und $f'(x_0, y_0)\vec{v} = -\alpha + \beta$. Obige Gleichungen lassen sich daher schreiben als

$$\alpha + 2\beta = -1 \qquad \text{und} \qquad -\alpha + \beta = 2\,.$$

Hieraus erhält man durch Addieren $3\beta = 1$, also $\beta = \frac{1}{3}$, und damit $\alpha = -\frac{5}{3}$. Folglich ist $f'(x_0, y_0) = (-\frac{5}{3} \;\; \frac{1}{3}) \in \mathbb{R}^{(1,2)}$ und aufgrund der Differenzierbarkeit von f in (x_0, y_0) ergibt sich

$$D_{\vec{w}} f(x_0, y_0) = f'(x_0, y_0)\vec{w} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\tfrac{4}{3}\,.$$

Wie wir aus der Vorlesung wissen (vgl. Satz 2 in 30.5), ist die gesuchte Richtung $\vec{h}$ gegeben durch

$$\vec{h} = \frac{\nabla f(x_0, y_0)}{\|\nabla f(x_0, y_0)\|} = \frac{1}{\sqrt{26}} \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 7

a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist f als Komposition stetiger Funktionen stetig; wir müssen also nur noch die Stetigkeit von f in $(0,0)$ nachweisen: Wegen

$$\left| \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| = \frac{|x^2 - y^2|}{x^2 + y^2} \leqslant \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} = 1$$

gilt $|f(x,y)| \leqslant |xy|$ für alle $(x,y) \neq (0,0)$. Damit folgt $f(x,y) \to 0 = f(0,0)$ für $(x,y) \to (0,0)$.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist

$$\begin{aligned} D_1 f(x,y) &= y\,\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy\,\frac{2x(x^2 + y^2) - (x^2 - y^2)2x}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{y(x^2 - y^2)(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{4x^2 y^3}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2}\,, \end{aligned}$$

und wegen $f(u,v) = -f(v,u)$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} D_2 f(x,y) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-f(y+h, x) + f(y,x)}{h} \\ &= -\lim_{h \to 0} \frac{f(y+h, x) - f(y,x)}{h} = -D_1 f(y,x) = -\frac{y^4 x + 4y^2 x^3 - x^5}{(y^2 + x^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt also

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} D_1 f(x,y) \\ D_2 f(x,y) \end{pmatrix} = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5 \\ x^5 - 4x^3 y^2 - x y^4 \end{pmatrix}.$$

Für die partiellen Ableitungen von f im Nullpunkt erhalten wir

$$D_1 f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

und

$$D_2 f(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, 0+h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0 - 0}{h} = 0\,.$$

Somit ist $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

c) Definitionsgemäß gilt

$$D_1D_2f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2f(h,0) - D_2f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{D_2f(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^5 - 0 - 0}{(h^2+0)^2} = 1\,.$$

Ebenso erhält man

$$D_2D_1f(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{D_1f(0,h) - D_1f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{D_1f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0+0-h^5}{h(0+h^2)^2} = -1\,.$$