Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2011
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 8. Übungsblatt

Aufgabe 1

Offenbar ist der Integrand jeweils eine stetige Funktion; wir können daher die Integrale mit Hilfe von Satz 1 aus 35.3 berechnen.

a) Es gilt

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} (xy+y^2)\,d(x,y) = \int_0^1 \int_0^1 (xy+y^2)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\tfrac12 xy^2 + \tfrac13 y^3\right]_{y=0}^1 dx$$
$$= \int_0^1 \left(\tfrac12 x + \tfrac13\right) dx = \left[\tfrac14 x^2 + \tfrac13 x\right]_0^1 = \tfrac14 + \tfrac13 = \tfrac{7}{12}\,.$$

b) Diesmal ergibt sich

$$\iint\limits_{[-1,0]\times[0,2]} \cosh(2x+y)\,d(x,y) = \int_{-1}^0 \int_0^2 \cosh(2x+y)\,dy\,dx = \int_{-1}^0 \big[\sinh(2x+y)\big]_{y=0}^2 dx$$
$$= \int_{-1}^0 \big(\sinh(2x+2) - \sinh(2x)\big)\,dx = \left[\tfrac12\cosh(2x+2) - \tfrac12\cosh(2x)\right]_{-1}^0$$
$$= \left(\tfrac12\cosh 2 - \tfrac12\cosh 0\right) - \left(\tfrac12\cosh 0 - \tfrac12\cosh(-2)\right) = \cosh 2 - 1 = \tfrac12(e^2+e^{-2}) - 1\,.$$

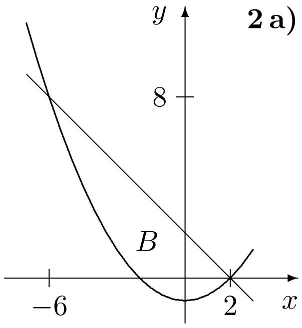
Aufgabe 2

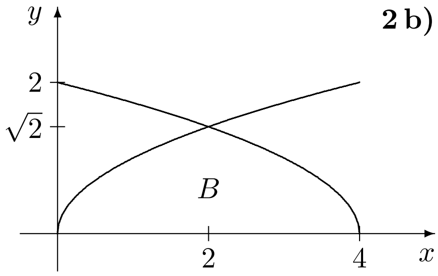
a) Wir bestimmen die Schnittpunkte der beiden Kurven $y = \frac14 x^2 - 1$ und $y = 2-x$. Dazu müssen wir die Lösungen der Gleichung $\frac14 x^2 - 1 = 2 - x$, also $x^2 + 4x - 12 = 0$ bestimmen. Dies sind $x_1 = -6$ und $x_2 = 2$ (siehe auch Skizze). Für den Flächeninhalt von B ergibt sich

$$\iint\limits_B d(x,y) = \int_{-6}^2 \int_{\frac14 x^2-1}^{2-x} dy\,dx = \int_{-6}^2 \left((2-x) - (\tfrac14 x^2 - 1)\right) dx = \int_{-6}^2 (-\tfrac14 x^2 - x + 3)\,dx$$
$$= \left[-\tfrac{1}{12}x^3 - \tfrac12 x^2 + 3x\right]_{-6}^2 = -\tfrac23 - 2 + 6 - (18-18-18) = \tfrac{64}{3}\,.$$

b) Hier schneiden wir die Kurven $x = y^2$ und $x = 4 - y^2$. Dies liefert die Gleichung $y^2 = 4 - y^2$, also $y^2 = 2$. Wegen $y > 0$ interessiert nur die Lösung $y = \sqrt2$ (siehe Skizze). Es gilt

$$\iint\limits_B d(x,y) = \int_0^{\sqrt2} \int_{y^2}^{4-y^2} dx\,dy = \int_0^{\sqrt2} \left((4-y^2)-y^2\right) dy = \left[4y - \tfrac23 y^3\right]_0^{\sqrt2} = 4\sqrt2 - \tfrac23\cdot 2\sqrt2 = \tfrac83\sqrt2\,.$$





Aufgabe 3

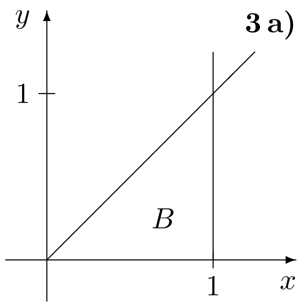
a) Es gilt

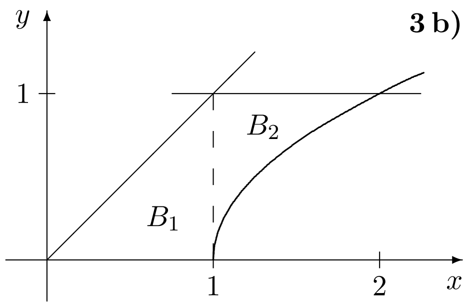
$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}\,dx\,dy = \int_0^1 \int_0^x e^{x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \int_0^x dy\, e^{x^2}\,dx = \int_0^1 x e^{x^2}\,dx = \left[\tfrac{1}{2} e^{x^2}\right]_0^1 = \tfrac{e-1}{2}\,.$$

Bemerkung: Hier ist das innere Integral $\int_y^1 e^{x^2}\,dx$ nicht explizit berechenbar. Für die Bestimmung eines iterierten Integrals kann also die Integrationsreihenfolge wesentlich sein.

b) Wir spalten den Integrationsbereich B in zwei Teile B_1, B_2 auf (siehe Skizze) und erhalten

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_y^{y^2+1} x^2 y\,dx\,dy &= \iint\limits_{B_1} x^2 y\,d(x,y) + \iint\limits_{B_2} x^2 y\,d(x,y)\\
&= \int_0^1 \int_0^x x^2 y\,dy\,dx + \int_1^2 \int_{\sqrt{x-1}}^1 x^2 y\,dy\,dx\\
&= \int_0^1 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2\right]_{y=0}^x dx + \int_1^2 \left[\tfrac{1}{2} x^2 y^2\right]_{y=\sqrt{x-1}}^1 dx\\
&= \int_0^1 \tfrac{1}{2} x^4\,dx + \int_1^2 \left(\tfrac{1}{2} x^2 - \tfrac{1}{2} x^2 (x-1)\right) dx\\
&= \left[\tfrac{1}{10} x^5\right]_{x=0}^1 + \left[-\tfrac{1}{8} x^4 + \tfrac{1}{3} x^3\right]_{x=1}^2 = \tfrac{1}{10} + \left(-2 + \tfrac{8}{3} + \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{3}\right) = \tfrac{67}{120}\,.
\end{aligned}$$





Aufgabe 4

Seien $R \geqslant r \geqslant 0$. Geometrische Überlegungen führen auf

$$\begin{aligned}
A &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\right\}\\
&= \left\{(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) \mid r \leqslant \varrho \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \tfrac{\pi}{2}\right\}.
\end{aligned}$$

Nun seien $R \geqslant 0$ und $a > 0$. Die Bedingung $x \geqslant 0$ bedeutet $\cos\varphi \geqslant 0$, also $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ oder $\varphi \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$. Zusätzlich muss wegen $y \geqslant ax$ die Ungleichung $\sin\varphi \geqslant a\cos\varphi$ gelten. Diese ist für kein

$\varphi \in [\frac{3}{2}\pi, 2\pi]$ erfüllt. Auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ gilt $\sin\varphi \geqslant a\cos\varphi$ für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$ mit $\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \geqslant a$, also $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $\varphi \geqslant \arctan a \in (0, \frac{\pi}{2})$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant ax\} \\ &= \{(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) \mid 0 \leqslant \varrho \leqslant R,\ \arctan a \leqslant \varphi \leqslant \tfrac{\pi}{2}\}\,. \end{aligned}$$

Außerdem gilt

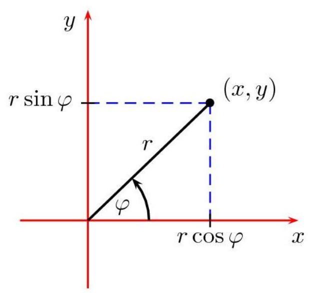
$$\begin{aligned} C &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2,\ x < 0,\ y \geqslant 0,\ z \leqslant 0\} \\ &= \{\big(r\cos\varphi\,\cos\vartheta,\ r\sin\varphi\,\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta\big) \mid r \in (1, \sqrt{2}],\ \varphi \in (\tfrac{\pi}{2}, \pi],\ \vartheta \in [-\tfrac{\pi}{2}, 0]\}\,, \\ D &= \{\big(r\cos\varphi\,\cos\vartheta,\ r\sin\varphi\,\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta\big) \mid r \in [0,\infty),\ \varphi \in [0, 2\pi),\ \vartheta = \tfrac{\pi}{2} - \tfrac{\alpha}{2}\}\,. \end{aligned}$$

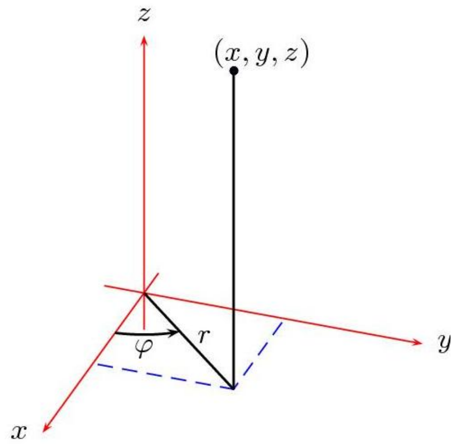
Wiederholung:

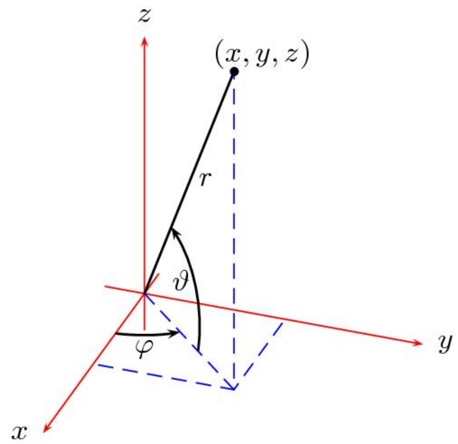
Polarkoordinaten im $\mathbb{R}^2$: Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ setze $r := \|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$. Dann findet man Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Zylinderkoordinaten im $\mathbb{R}^3$: Hier ist $[0,\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $(r,\varphi,z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$, also $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und $z = z$.

Kugelkoordinaten im $\mathbb{R}^3$: $[0,\infty) \times [0,2\pi) \times [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}^3$, $(r,\varphi,\vartheta) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\varphi\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix}$, also $x = r\cos\varphi\cos\vartheta$, $y = r\sin\varphi\cos\vartheta$, $z = r\sin\vartheta$.







Aufgabe 5

a) Mit $\vec{r}\,'(t) = (\cos t - t\sin t, \sin t + t\cos t, 1)$ ergibt sich für jedes $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \|\vec{r}\,'(t)\| &= \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1} \\ &= \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1} = \sqrt{2+t^2}\,. \end{aligned}$$

Nach Definition des Kurvenintegrals ist dann

$$\begin{aligned} \int_\gamma f\,ds &= \int_0^{2\pi} f(\vec{r}(t))\,\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt = \int_0^{2\pi} \Big(2t - \sqrt{t^2\cos^2 t + t^2\sin^2 t}\Big)\sqrt{2+t^2}\,dt \\ &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\,dt = \big[\tfrac{1}{3}(2+t^2)^{3/2}\big]_0^{2\pi} = \tfrac{1}{3}\big((2+4\pi^2)^{3/2} - 2^{3/2}\big) \\ &= \tfrac{2}{3}\sqrt{2}\big((1+2\pi^2)^{3/2} - 1\big)\,. \end{aligned}$$

b) **i)** Definitionsgemäß ist

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} e^{\cos t} \\ \cos t\sin t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{2\pi} (-e^{\cos t}\sin t + \sin t\cos^2 t)\,dt = \big[e^{\cos t} - \tfrac{1}{3}\cos^3 t\big]_{t=0}^{2\pi} = 0\,.$$

ii) Wir benutzen wieder die Definition des Kurvenintegrals:

$$\int_{\tilde\gamma} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^{\ln 2} \vec{v}(\vec{r}(t))\cdot\vec{r}\,'(t)\,dt = \int_0^{\ln 2} \begin{pmatrix}\cosh t\\ -\sinh t\\ \sinh t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cosh t\\ \sinh t\\ \cosh t\end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^{\ln 2} (\cosh^2 t - \sinh^2 t + \sinh t\cosh t)\,dt = \int_0^{\ln 2} (1+\sinh t\cosh t)\,dt$$
$$= \ln 2 + \big[\tfrac12\sinh^2 t\big]_0^{\ln 2} = \ln 2 + \tfrac12\sinh^2(\ln 2) = \ln 2 + \tfrac12\big(\tfrac12(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2})\big)^2 = \ln 2 + \tfrac{9}{32}\,.$$

iii) Die Kurven $\vec{r}_1\colon [0,1]\to\mathbb{R}^2$, $\vec{r}_1(t) = (t,0)$, und $\vec{r}_2\colon [1,2]\to\mathbb{R}^2$, $\vec{r}_2(t) = (1,t-1)$, sind regulär mit $\vec{r}_1(1) = \vec{r}_2(1)$. Somit liegt die Situation aus Bemerkung 4 in 36.1 vor:

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_1(t))\cdot\vec{r}_1\,'(t)\,dt + \int_1^2 \vec{v}(\vec{r}_2(t))\cdot\vec{r}_2\,'(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 \begin{pmatrix}\sin t\\ t^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} dt + \int_1^2 \begin{pmatrix}\sin 1\\ 1+(t-1)^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} dt$$
$$= \int_0^1 \sin t\,dt + \int_1^2 \big(1+(t-1)^2\big)\,dt = \big[-\cos t\big]_0^1 + \big[t + \tfrac13(t-1)^3\big]_1^2$$
$$= (-\cos 1 + 1) + (2 + \tfrac13 - 1) = \tfrac73 - \cos 1\,.$$

c) Schreibe $\vec{f} =: (f_1, f_2)$. Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend ist und die Integrabilitätsbedingung

$$D_1 f_2(x,y) = D_1(x^2+y^2) = 2x = D_2(2xy) = D_2 f_1(x,y) \qquad \text{auf } \mathbb{R}^2$$

erfüllt ist, stellt $\vec{f}$ ein Potentialfeld dar, d.h. es gibt ein Skalarfeld $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ mit $\vec{f} = \nabla\varphi$. Wegen $\partial_x\varphi(x,y) = f_1(x,y) = 2xy$ ist $\varphi(x,y) = x^2y + \psi(y)$ für eine stetig differenzierbare Funktion $\psi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Aus $\partial_y\varphi(x,y) = f_2(x,y)$ und $\partial_y\varphi(x,y) = x^2 + \psi'(y)$ folgt $\psi'(y) = y^2$. Dies ist beispielsweise für $\psi(y) = \frac13 y^3$ erfüllt. Somit ist

$$\varphi(x,y) = x^2y + \frac{1}{3}\,y^3$$

ein Potential von $\vec{f}$ auf $\mathbb{R}^2$. Die Arbeit A ist gleich dem Wert des Kurvenintegrals

$$A = \int_\gamma \vec{f}\cdot d\vec{s}\,,$$

welches wegen $\vec{f} = \nabla\varphi$ nur vom Anfangs- und Endpunkt von γ abhängt:

$$A = \varphi(-1,2) - \varphi(0,0) = \frac{14}{3}\,.$$