Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

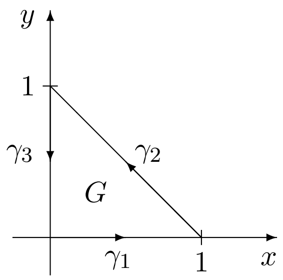
Sommersemester 2011

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 9. Übungsblatt

Aufgabe 1

Zunächst berechnen wir $\oint_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s}$ direkt mittels der Definition des Kurvenintegrals:



Definiere die regulären Kurven $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3 \colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\vec{r}_1(t) = (t,0)\,, \qquad \vec{r}_2(t) = (1-t,t)\,, \qquad \vec{r}_3(t) = (0,1-t)\,.$$

Dann ist $\vec{r}_k$ eine Parametrisierung von γ_k (für $k = 1,2,3$) und es gilt $\vec{r}_1(1) = (1,0) = \vec{r}_2(0)$, $\vec{r}_2(1) = (0,1) = \vec{r}_3(0)$ sowie $\vec{r}_3(1) = (0,0) = \vec{r}_1(0)$. Da der positiv durchlaufene Rand des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$ durch $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$ gegeben ist, erhält man

$$\oint_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_3} \vec{v}\cdot d\vec{s}\,.$$

Für die drei Kurvenintegrale auf der rechten Seite ergibt sich

$$\int_{\gamma_1} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}(\vec{r}_1(t))\cdot \vec{r}_1{}'(t)\,dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 + t\cdot 0 \\ t^2\cdot 0 - 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} dt = \int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3}\,,$$

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} (1-t)^2 + (1-t)t \\ (1-t)^2 t - t^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-t \\ t - 3t^2 + t^3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 t^3 - 3t^2 + 2t - 1\,dt = \left[\tfrac{1}{4}\,t^4 - t^3 + t^2 - t\right]_0^1 = -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

und

$$\int_{\gamma_3} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \int_0^1 \begin{pmatrix} 0 + 0\cdot(1-t) \\ 0\cdot(1-t) - (1-t)^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} dt = \int_0^1 (1-t)^2\,dt = \left[-\tfrac{1}{3}\,(1-t)^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\,.$$

Zusammen folgt

$$\oint_{\vec{\gamma}} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \frac{1}{3} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,.$$

Unter Verwendung des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene lässt sich das Kurvenintegral folgendermaßen ausrechnen:

$G \subset \mathbb{R}^2$ sei das Innere des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$. Dann ist G ein beschränktes Gebiet, das gleichzeitig vom Typ $G^{(x)}$ und Typ $G^{(y)}$ ist. Es seien $v_1(x,y) := x^2 + xy$ sowie $v_2(x,y) := x^2y - y^2$ gesetzt. Offenbar ist $\vec{v} = (v_1, v_2)$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und γ stückweise glatt, so dass die Voraussetzungen des Gaußschen Integralsatzes in der Ebene erfüllt sind. Dieser liefert

$$\oint_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_G \big(D_1v_2(x,y) - D_2v_1(x,y)\big)\, d(x,y) = \iint_G (2xy - x)\, d(x,y)\,.$$

Da der Integrand stetig ist, gilt

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (2xy - x)\, dy \right) dx = \int_0^1 \big[xy^2 - xy\big]_{y=0}^{1-x}\, dx \\ &= \int_0^1 \big(x(1-x)^2 - x(1-x)\big)\, dx = \int_0^1 \big(x^3 - x^2\big)\, dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Setzen wir $\vec{v}(x,y) := (v_1(x,y), v_2(x,y))$ mit $v_1(x,y) := -x^2y$ und $v_2(x,y) := xy$, dann ist $\vec{v}$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar und es gilt $D_1v_2(x,y) - D_2v_1(x,y) = y + x^2$. Der Gaußsche Integralsatz liefert

$$\iint_G (x^2 + y)\, d(x,y) = \iint_G \big(D_1v_2(x,y) - D_2v_1(x,y)\big)\, d(x,y) = \oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s}\,.$$

Der positiv orientierte Rand ∂G der offenen Einheitskreisscheibe G ist gegeben durch die reguläre Kurve $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t)$ mit $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Folglich ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint_G (x^2 + y)\, d(x,y) &= \int_0^{2\pi} \vec{v}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\cos^2 t\, \sin t \\ \cos t\, \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \big(\cos^2 t\, \sin^2 t + \sin t \cos^2 t\big)\, dt \overset{(*)}{=} \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{4} \sin^2(2t)\, dt + \int_0^{2\pi} \sin t \cos^2 t\, dt \\ &= \tfrac{1}{4} \int_0^{2\pi} \sin^2(2t)\, dt - \big[\tfrac{1}{3}\cos^3 t\big]_{t=0}^{2\pi} \overset{(**)}{=} \tfrac{1}{8} \int_0^{4\pi} \sin^2(u)\, du \overset{(***)}{=} \tfrac{1}{8} \cdot 2\pi = \tfrac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

Hierbei verwendeten wir in $(*)$ das Additionstheorem des Sinus $2 \sin t \cos t = \sin(2t)$, in $(**)$ die Substitution $u = 2t$ und in $(***)$ die Identität $\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du = \pi$. Letztere kann man z.B. mit Hilfe von partieller Integration zeigen oder auch folgendermaßen einsehen: Zuerst bemerken wir $\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du = \int_0^{2\pi} \cos^2(u)\, du$. In der Tat ist aufgrund der 2π-Periodizität von cos

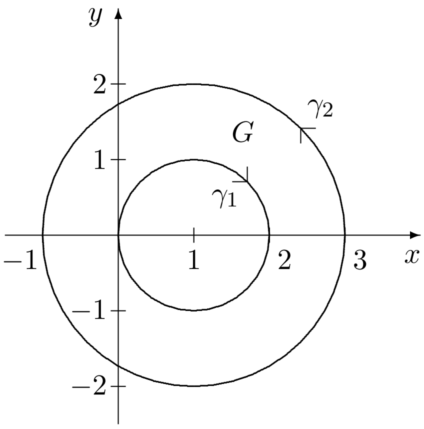
$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du &\overset{\text{Subst. } t = u - \frac{\pi}{2}}{=} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \sin^2(t + \tfrac{\pi}{2})\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2(t)\, dt \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2(t)\, dt + \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2(t)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2(t + 2\pi)\, dt + \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2(t)\, dt \\ &\overset{\text{Subst. } v = t + 2\pi}{=} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi} \cos^2(v)\, dv + \int_0^{\frac{3}{2}\pi} \cos^2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du &= \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du + \int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du \right) = \frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi} \sin^2(u)\, du + \int_0^{2\pi} \cos^2(u)\, du \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \big(\sin^2(u) + \cos^2(u)\big)\, du = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1\, du = \pi. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Die Menge G ist ein Kreisring um den Punkt $(1, 0)$ mit innerem Radius 1 und äußerem Radius 2.



Um das Bereichsintegral über G zu berechnen, führen wir Polarkoordinaten ein:

$$x = 1 + r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad d(x,y) = r\,d(r,\varphi)\,, \qquad 1 \leqslant r \leqslant 2\,, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,.$$

Wegen $D_1v_2(x,y) = 2xy$ und $D_2v_1(x,y) = x$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
\iint_G \big(D_1v_2(x,y) - D_2v_1(x,y)\big)\,d(x,y) &= \iint_G (2xy - x)\,d(x,y) \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} \big(2(1 + r\cos\varphi)r\sin\varphi - (1 + r\cos\varphi)\big)r\,d\varphi\right) dr \\
&= \int_1^2 \left(\int_0^{2\pi} (2r^2\sin\varphi + 2r^3\cos\varphi\sin\varphi - r - r^2\cos\varphi)\,d\varphi\right) dr \\
&= \int_1^2 \Big[-2r^2\cos\varphi + r^3\sin^2\varphi - r\varphi - r^2\sin\varphi\Big]_{\varphi=0}^{2\pi} dr \\
&= \int_1^2 -2\pi r\,dr = \big[-\pi r^2\big]_{r=1}^2 = -\pi(4-1) = -3\pi\,.
\end{aligned}$$

Nun müssen wir das Kurvenintegral berechnen; dabei ist ∂G der positiv orientierte Rand von G. Hier besteht ∂G also aus zwei Kurven γ_1 und γ_2 (siehe Skizze); beide sind so orientiert, dass G jeweils links liegt. Wir berechnen nun $\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s}$ für die durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 + \varrho\cos t \\ \varrho\sin t \end{pmatrix} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

gegebene Kurve γ, denn für $\varrho = 1$ ist dies $-\gamma_1$, und für $\varrho = 2$ erhalten wir γ_2. Es gilt

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} v_1(\vec{r}(t)) \\ v_2(\vec{r}(t)) \end{pmatrix} \cdot \vec{r}\,'(t)\,dt \\
&= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} (1 + \varrho\cos t)^2 + (1 + \varrho\cos t)\varrho\sin t \\ (1 + \varrho\cos t)^2\varrho\sin t - (\varrho\sin t)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\varrho\sin t \\ \varrho\cos t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \big(-\varrho\sin t - 2\varrho^2\cos t\sin t - \varrho^3\sin t\cos^2 t - \varrho^2\sin^2 t - \varrho^3\cos t\sin^2 t \\
&\qquad + \varrho^2\cos t\sin t + 2\varrho^3\sin t\cos^2 t + \varrho^4\sin t\cos^3 t - \varrho^3\cos t\sin^2 t\big)\,dt\,.
\end{aligned}$$

Alle zu integrierenden Funktionen außer $\sin^2 t$ haben offensichtlich Stammfunktionen, die 2π-periodisch sind; das Integral $\int_0^{2\pi}\ldots$ ergibt daher bei ihnen 0. Es verbleibt

$$\int_\gamma \vec{v}\cdot d\vec{s} = -\varrho^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t\,dt = -\frac{\varrho^2}{2}\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = -\varrho^2\pi\,.$$

(Im vorletzten Schritt haben wir $\int_0^{2\pi} \sin^2 t\, dt = \int_0^{2\pi} \cos^2 t\, dt$ benutzt.) Damit ergibt sich

$$\oint_{\partial G} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{\gamma_2} \vec{v} \cdot d\vec{s} = -(-\pi) + (-4\pi) = -3\pi\,.$$

Aufgabe 4

a) Wir setzen in die Ungleichung, die G definiert, Polarkoordinaten ein, also $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$ mit $r \geqslant 0$ und $0 \leqslant \varphi < 2\pi$:

$$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 < 3r^2\cos^2\varphi + 4r^2\sin^2\varphi\,.$$

Wegen $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ bedeutet das $r^4 < r^2(3 + \sin^2\varphi)$. Dies ist genau dann erfüllt, wenn $r \neq 0$ und $r^2 < 3 + \sin^2\varphi$. Der Rand von G besteht folglich aus dem Punkt $(0,0)$ und der durch die Parametrisierung

$$\vec{r}(t) := \begin{pmatrix} r(t)\cos t \\ r(t)\sin t \end{pmatrix} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)\,, \qquad \text{wobei} \;\; r(t) := \sqrt{3 + \sin^2 t}\,,$$

gegebenen Kurve.

b) Die Leibnizsche Sektorformel liefert für den Flächeninhalt von G

$$I(G) = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(t)\, dt = \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi} (3 + \sin^2 t)\, dt \overset{(***) \text{ in Aufg. 2}}{=} \tfrac{1}{2}(6\pi + \pi) = \tfrac{7}{2}\pi\,.$$

Aufgabe 5

a) Die Funktionen $\vec{v}$, $\vec{w}$ sind stetig differenzierbar und auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert. Da $\mathbb{R}^3$ einfach zusammenhängend ist, gilt: Es handelt sich genau dann um ein Potentialfeld, wenn die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist. Im $\mathbb{R}^3$ ist dies äquivalent dazu, dass die Rotation verschwindet. (vgl. Satz 4 in 38.3) Schreibe $\vec{v} =: (v_1, v_2, v_3)$. Wegen

$$D_2 v_3(x,y,z) = 2y + 3z^2x^2\,, \qquad D_3 v_2(x,y,z) = 3z^2x^2 \neq D_2 v_3(x,y,z)$$

ist $\nabla \times \vec{v} \neq \vec{0}$. Also ist $\vec{v}$ kein Potentialfeld, d.h. es gibt kein C^1-Skalarfeld $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $\vec{v} = \nabla f$.

Für $\vec{w} =: (w_1, w_2, w_3)$ hingegen gilt

$$D_2 w_3 = e^z = D_3 w_2\,, \qquad D_3 w_1 = 2z = D_1 w_3\,, \qquad D_1 w_2 = 0 = D_2 w_1\,.$$

Somit ist $\vec{w}$ ein Potentialfeld, besitzt also ein Potential $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Für dieses Potential muss $\partial_x f(x,y,z) = z^2$ gelten. Integrieren bezüglich x liefert:

$$f(x,y,z) = z^2x + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion $c: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (Die „Integrationskonstante“ kann also noch von y und z abhängen.) Es folgt $\partial_y f(x,y,z) = \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= e^z$ sein. Daher haben wir $c(y,z) = ye^z + d(z)$ mit einer gewissen Funktion $d: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Wir wissen also

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z + d(z)\,,$$

und hieraus folgt $\partial_z f(x,y,z) = 2zx + ye^z + d'(z)$. Damit dies gleich der dritten Komponente von $\vec{w}$ wird, muss $d' = 0$ gelten. Wir wählen $d = 0$ und haben ein Potential von $\vec{w}$:

$$f(x,y,z) = z^2x + ye^z\,.$$

b) Bei $\vec{v}$ rechnen wir das Kurvenintegral anhand der Definition aus:

$$\int_\gamma \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{v}\big(\vec{r}(t)\big) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t \\ t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \left[-\tfrac{1}{3}t^3 + t^2\right]_0^1 = \tfrac{2}{3}\,.$$

Bei $\vec{w}$ dagegen können wir auf das oben bestimmte Potential f zurückgreifen:

$$\int_\gamma \vec{w} \cdot d\vec{s} = f\big(\vec{r}(1)\big) - f\big(\vec{r}(0)\big) = f(0,1,0) - f(1,0,0) = 1 - 0 = 1\,.$$

Aufgabe 6

a) Die Menge $G := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x,y,z > 0\}$ ist einfach zusammenhängend und die Funktion $\vec{v}$ ist darauf stetig differenzierbar. (Sämtliche partiellen Ableitungen von $\vec{v}$ sind auf G stetig.) Daher gilt: $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn die Integrabilitätsbedingung aus Satz 4 in 38.3 erfüllt ist. Dies ist für $\vec{v}\colon \mathbb{R}^3 \supset G \to \mathbb{R}$ äquivalent zu $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$. Es gilt

$$\operatorname{rot} \vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} D_2 v_3(x,y,z) - D_3 v_2(x,y,z) \\ D_3 v_1(x,y,z) - D_1 v_3(x,y,z) \\ D_1 v_2(x,y,z) - D_2 v_1(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-b \\ -3-c \\ 1-a \end{pmatrix}.$$

Wir lesen ab: $\vec{v}$ ist genau dann ein Potentialfeld, wenn $a = 1$, $b = 1$ und $c = -3$ gilt.

In diesem Falle können wir von

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y-3z \\ x+2y+z \\ -3x+y+4z \end{pmatrix}$$

ein Potential $f\colon G \to \mathbb{R}$ bestimmen. Da $\partial_x f(x,y,z) = x+y-3z$ gelten soll, ergibt sich

$$f(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + c(y,z)$$

mit einer gewissen Funktion $c\colon (0,\infty) \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Es folgt $\partial_y f(x,y,z) = x + \partial_y c(y,z)$, und dies soll $= x+2y+z$ sein. Das bedeutet $\partial_y c(x,y) = 2y+z$, also $c(y,z) = y^2 + yz + d(z)$ mit einer gewissen Funktion $d\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$. Somit:

$$f(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + y^2 + yz + d(z)\,.$$

Hieraus folgt $\partial_z f(x,y,z) = -3x + y + d'(z)$, und damit ergibt sich die Forderung $d'(z) = 4z$. Wir wählen $d(z) = 2z^2$ und haben damit ein Potential

$$f(x,y,z) = \tfrac{1}{2}x^2 + xy - 3xz + y^2 + yz + 2z^2\,.$$

b) Da $\mathbb{R}^2$ einfach zusammenhängend und $\vec{v}$ ein C^1-Vektorfeld ist, stellt $\vec{v}$ genau dann ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ dar, wenn die Integrabilitätsbedingung aus Satz 4 in 38.3 erfüllt ist.

Ist $\vec{v}(x,y) =: \begin{pmatrix} v_1(x,y) \\ v_2(x,y) \end{pmatrix}$ gesetzt, so gilt für jedes $x,y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} D_2 v_1(x,y) &= 2xg(xy) + (1+2xy)g'(xy)x, \\ D_1 v_2(x,y) &= 4xg(xy) + 2x^2 g'(xy)y. \end{aligned}$$

Daher ergibt sich für alle $x,y \in \mathbb{R}$

$$D_2 v_1(x,y) = D_1 v_2(x,y) \quad\Longleftrightarrow\quad 2xg(xy) + xg'(xy) = 4xg(xy) \quad\Longleftrightarrow\quad xg'(xy) = 2xg(xy).$$

Dies ist genau dann erfüllt, falls $g'(t) = 2g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, also genau für $g(t) = Ce^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, wobei $C \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante ist. Die Forderung $g(0) = 2$ führt auf $C = 2$.

Fazit: Ist $g(t) := 2e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, gesetzt, so gilt $g(0) = 2$ und $\vec{v}$ stellt ein Potentialfeld auf $\mathbb{R}^2$ dar.

Nun berechnen wir ein zugehöriges Potential $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Wegen $D_2 f(x,y) = 4x^2 e^{2xy} + 1$ gilt $f(x,y) = 2xe^{2xy} + y + h(x)$ für eine differenzierbare Funktion $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Aus $D_1 f(x,y) = 2e^{2xy} + 4xye^{2xy} + h'(x)$ und $D_1 f(x,y) = v_1(x,y)$ folgt $h'(x) = 0$; dies ist beispielsweise für $h \equiv 0$ erfüllt. Somit gilt $\nabla f = \vec{v}$ für $f(x,y) = 2xe^{2xy} + y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.