Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2011
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Aufgabe 1

Eine Parametrisierung des Kegelmantels $\mathcal{F}$ ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} =: \vec{g}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,1]\times[0,2\pi].$$

Mit

$$\big\|D_1\vec{g}(r,\varphi) \times D_2\vec{g}(r,\varphi)\big\| = \left\| \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} -r\cos\varphi \\ -r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2}\, r$$

und

$$\|\vec{g}(r,\varphi) - \vec{a}\| = \left\| \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r-1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2r^2 - 2r + 1}$$

erhält man

$$\begin{aligned} U(\vec{a}) &= \varrho \iint_{\mathcal{F}} \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{a}\|}\, do = \varrho \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{1}{\|\vec{g}(r,\varphi) - \vec{a}\|} \big\|D_1\vec{g}(r,\varphi) \times D_2\vec{g}(r,\varphi)\big\|\, d(r,\varphi) \\ &= \varrho \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2r^2-2r+1}} \sqrt{2}\, r\, d\varphi\, dr = 2\sqrt{2}\,\pi\,\varrho \int_0^1 \frac{r}{\sqrt{2r^2-2r+1}}\, dr \overset{\text{Hinweis}}{=} -2\pi\varrho \ln(\sqrt{2}-1). \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Die Fläche $\mathcal{F}$ liegt in Parameterdarstellung vor mit

$$\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ v^2 - u^2 \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in U := \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid u^2 + v^2 \leqslant 3\}.$$

Der Stokessche Integralsatz liefert

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \iint_{\mathcal{F}} (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{o} = \iint_U (\nabla \times \vec{v})\big(\vec{r}(u,v)\big) \cdot \big(D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)\big)\, d(u,v).$$

Nun ist

$$D_1\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2u \end{pmatrix}, \quad D_2\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2v \end{pmatrix}, \qquad \text{also} \qquad D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \\ -2v \\ 1 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_2 v_3 - D_3 v_2 \\ D_3 v_1 - D_1 v_3 \\ D_1 v_2 - D_2 v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 1-(-2) \\ 9-(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Folglich ergibt sich

$$\int_{\partial\mathcal{F}} \vec{v}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_U \begin{pmatrix}4\\3\\14\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2u\\-2v\\1\end{pmatrix}\, d(u,v) = \iint\limits_U (8u-6v+14)\, d(u,v)\,;$$

und mit Polarkoordinaten (U ist die Kreisscheibe um $(0,0)$ mit Radius $\sqrt{3}$) erhält man unter Berücksichtigung von $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\sin\varphi\, d\varphi = 0$:

$$\begin{aligned}&= \int_0^{\sqrt{3}}\int_0^{2\pi}(8r\cos\varphi - 6r\sin\varphi + 14)\, r\, d\varphi\, dr = \int_0^{\sqrt{3}} 28\pi r\, dr\\ &= 28\pi\left[\tfrac{1}{2}r^2\right]_{r=0}^{\sqrt{3}} = 28\pi\cdot\tfrac{3}{2} = 42\pi\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) Die Oberfläche $\mathcal{F}$ des Zylinders Z besteht aus drei Teilen, nämlich aus der Bodenfläche $\mathcal{F}_1$, der Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ und der oberen Deckfläche $\mathcal{F}_3$.

Die Bodenfläche $\mathcal{F}_1$ können wir durch die Parametrisierung $\vec{r}(u,v) := (u\cos v, u\sin v, 0)$ mit $(u,v)\in U := [0,1]\times[0,2\pi]$ darstellen. Es gilt

$$D_1\vec{r}(u,v)\times D_2\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix}\cos v\\ \sin v\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-u\sin v\\ u\cos v\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\u\cos^2 v + u\sin^2 v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\u\end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich $\vec{N} = (0,0,-1)$ als äußere Einheitsnormale. (Man teilt $D_1\vec{r}(u,v)\times D_2\vec{r}(u,v)$ durch die Norm $\|D_1\vec{r}(u,v)\times D_2\vec{r}(u,v)\|$ und wählt dann noch das Vorzeichen so, dass der Vektor nach außen weist.) Also ist $\iint_{\mathcal{F}_1}\vec{v}\cdot\vec{N}\, do = 0$, denn

$$\big(\vec{v}(\vec{r}(u,v))\big)\cdot\big(\vec{N}(\vec{r}(u,v))\big) = \begin{pmatrix}u^3\cos^3 v\\ u^3\cos^2 v\,\sin v\\ 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} = 0\,.$$

Die Mantelfläche $\mathcal{F}_2$ wird durch $\vec{r}(u,v) := (\cos u, \sin u, v)$ mit $(u,v)\in U := [0,2\pi]\times[0,1]$ parametrisiert. Wir erhalten

$$D_1\vec{r}(u,v)\times D_2\vec{r}(u,v) = \begin{pmatrix}-\sin u\\ \cos u\\ 0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 0\end{pmatrix}.$$

Dies ist die äußere Einheitsnormale $\vec{N}$ an $\mathcal{F}_2$. Wegen

$$\big(\vec{v}(\vec{r}(u,v))\big)\cdot\big(\vec{N}(\vec{r}(u,v))\big) = \begin{pmatrix}\cos^3 u\\ \cos^2 u\,\sin u\\ v\cos^2 u\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\cos u\\ \sin u\\ 0\end{pmatrix} = \cos^4 u + \cos^2 u\,\sin^2 u = \cos^2 u$$

folgt

$$\iint\limits_{\mathcal{F}_2}\vec{v}\cdot\vec{N}\, do = \iint\limits_U \cos^2 u\, \underbrace{\|D_1\vec{r}(u,v)\times D_2\vec{r}(u,v)\|}_{=\cos^2 u + \sin^2 u = 1}\, d(u,v) = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \cos^2 u\, dv\, du = \int_0^{2\pi}\cos^2 u\, du = \pi\,.$$

Es bleibt noch die Deckfläche $\mathcal{F}_3$: Die Parametrisierung $\vec{r}(u,v) := (u\cos v, u\sin v, 1)$ mit $(u,v)\in U := [0,1]\times[0,2\pi]$ liefert $D_1\vec{r}(u,v)\times D_2\vec{r}(u,v) = (0,0,u)$. Es ist $\vec{N} = (0,0,1)$ und damit

$$\big(\vec{v}(\vec{r}(u,v))\big)\cdot\big(\vec{N}(\vec{r}(u,v))\big) = \begin{pmatrix}u^3\cos^3 v\\ u^3\cos^2 v\,\sin v\\ u^2\cos^2 v\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = u^2\cos^2 v\,.$$

Somit erhalten wir

$$\iint\limits_{\mathcal{F}_3} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iint\limits_{U} u^2 \cos^2 v \underbrace{\|D_1\vec{r}(u,v) \times D_2\vec{r}(u,v)\|}_{=|u|=u,\ \text{da } u \geqslant 0} d(u,v) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} u^3 \cos^2 v \, dv\, du$$

$$= \left(\int_0^1 u^3\, du\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2 v\, dv\right) = \tfrac{1}{4}\pi\,.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \sum_{k=1}^{3} \iint\limits_{\mathcal{F}_k} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = 0 + \pi + \tfrac{1}{4}\pi = \tfrac{5}{4}\pi\,.$$

b) Nach dem Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ ist

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iiint\limits_{Z} (\nabla \cdot \vec{v}\,)\, d(x,y,z)\,.$$

Nun gilt $(\nabla \cdot \vec{v})(x,y,z) = D_1(x^3) + D_2(x^2 y) + D_3(x^2 z) = 3x^2 + x^2 + x^2 = 5x^2$ und mit Zylinderkoordinaten $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, wobei $r \in [0,1]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in [0,1]$, folgt

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \vec{v} \cdot \vec{N}\, do = \iiint\limits_{Z} 5x^2\, d(x,y,z) = \iiint\limits_{[0,1]\times[0,2\pi]\times[0,1]} 5(r\cos\varphi)^2\, r\, d(r,\varphi,z)$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 5r^3 \cos^2\varphi\, dz\, d\varphi\, dr = \int_0^1 \int_0^{2\pi} 5r^3 \cos^2\varphi\, d\varphi\, dr$$

$$= 5\left(\int_0^1 r^3\, dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi\right) = \tfrac{5}{4}\pi\,.$$

Aufgabe 4

$\vec{N}$ sei stets die Einheitsnormale auf ∂K, die ins Äußere von K gerichtet ist. Für den Fluß des Vektorfeldes $\vec{f}$ durch die Oberfläche ∂K des Kegels K nach außen gilt

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do.$$

Die Oberfläche ∂K besteht aus dem Kegelmantel und dem Grundkreis. Wir parametrisieren zunächst den Kegelmantel

$$M := \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 2 - \sqrt{x^2+y^2},\ z \geqslant 0\right\}$$

durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 2-r \end{pmatrix} =: \vec{g}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,2] \times [0,2\pi].$$

Dann ist

$$D_1\vec{g}(r,\varphi) \times D_2\vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach außen. Weiter gilt

$$\vec{f}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \left(D_1\vec{g}(r,\varphi) \times D_2\vec{g}(r,\varphi)\right) = \begin{pmatrix} 2-r \\ r\sin\varphi \\ 3-r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ r \end{pmatrix} = (2-r)r\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3-r)r$$

$$= (2r - r^2)\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3r - r^2).$$

Für den Fluß von $\vec{f}$ durch die Mantelfläche M nach außen erhält man

$$\begin{aligned}
\iint_M \vec{f} \cdot \vec{N}\, do &= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec{f}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \frac{D_1\vec{g}(r,\varphi) \times D_2\vec{g}(r,\varphi)}{\|D_1\vec{g}(r,\varphi) \times D_2\vec{g}(r,\varphi)\|} \, \|D_1\vec{g}(r,\varphi) \times D_2\vec{g}(r,\varphi)\|\, d(r,\varphi) \\
&= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} \vec{f}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(D_1\vec{g}(r,\varphi) \times D_2\vec{g}(r,\varphi)\big)\, d(r,\varphi) \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \big((2r-r^2)\cos\varphi + r^2\sin^2\varphi + (3r-r^2)\big)\, d\varphi\, dr \\
&= \int_0^2 \big(\pi r^2 + (3r-r^2)2\pi\big)\, dr = \Big[\pi\,\frac{r^3}{3} + \Big(\frac{3}{2}\,r^2 - \frac{r^3}{3}\Big)\, 2\pi\Big]_0^2 = \frac{28}{3}\,\pi.
\end{aligned}$$

Eine Parametrisierung des Grundkreises

$$G := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4,\ z = 0\big\}$$

ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =: \vec{g}(r,\varphi) \qquad \text{mit } (r,\varphi) \in [0,2] \times [0,2\pi].$$

Dann ist

$$D_1\vec{g}(r,\varphi) \times D_2\vec{g}(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin\varphi \\ r\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor zeigt nach innen. Wegen

$$\vec{f}(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(-D_1\vec{g}(r,\varphi) \times D_2\vec{g}(r,\varphi)\big) = \begin{pmatrix} 0 \\ r\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} = -r$$

ergibt sich für den Fluß von $\vec{f}$ durch die Grundfläche G nach außen

$$\begin{aligned}
\iint_G \vec{f} \cdot \vec{N}\, do &= \iint_{[0,2]\times[0,2\pi]} f(\vec{g}(r,\varphi)) \cdot \big(-D_1\vec{g}(r,\varphi) \times D_2\vec{g}(r,\varphi)\big)\, d(r,\varphi) \\
&= \int_0^2 \int_0^{2\pi} -r\, d\varphi\, dr = -\int_0^2 2\pi r\, dr = -4\pi.
\end{aligned}$$

Der Fluß von $\vec{f}$ durch die gesamte Oberfläche ∂K des Kegels K nach außen beträgt somit

$$\iint_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do = \iint_M \vec{f} \cdot \vec{N}\, do + \iint_G \vec{f} \cdot \vec{N}\, do = \frac{28}{3}\,\pi - 4\pi = \frac{16}{3}\,\pi.$$

Alternativ: Man kann $\iint_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do$ auch mit dem Gaußschen Integralsatz im $\mathbb{R}^3$ berechnen:

$$\iint_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do = \iiint_K \nabla \cdot \vec{f}\, d\tau = \iiint_K 2\, d(x,y,z),$$

wobei wir hier $d\tau$ für $d(x,y,z)$ geschrieben und $(\nabla \cdot \vec{f})(x,y,z) = \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} = 0+1+1 = 2$ verwendet haben. Mit Zylinderkoordinaten

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi, \qquad z = z$$

lässt sich K charakterisieren durch

$$r \in [0,2], \qquad \varphi \in [0,2\pi], \qquad z \in [0, 2-r],$$

so dass folgt

$$\iint\limits_{\partial K} \vec{f} \cdot \vec{N}\, do = 2 \iiint\limits_{K} d(x,y,z) = 2 \int_0^2 \int_0^{2-r} \int_0^{2\pi} r\, d\varphi\, dz\, dr$$
$$= 4\pi \int_0^2 \int_0^{2-r} r\, dz\, dr = 4\pi \int_0^2 (2r - r^2)\, dr = 4\pi \big[r^2 - \tfrac{1}{3} r^3\big]_0^2 = \frac{16}{3}\,\pi .$$

Aufgabe 5

a) Für $(x,y,z) \in A$ gilt nach Definition der Menge $x \in [1,2]$ sowie $0 \leqslant x^2 - y^2$, also $y^2 \leqslant x^2$, d.h. $|y| \leqslant |x| = x$ wegen $x > 0$. Mit

$$A_0 := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in [1,2],\ -x \leqslant y \leqslant x\big\}$$

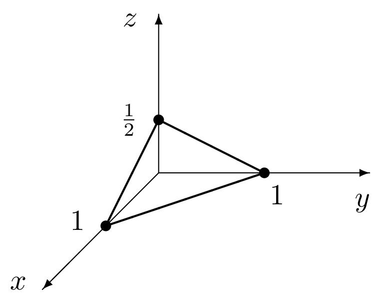
lässt sich A folgendermaßen schreiben

$$A = \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in A_0,\ 0 \leqslant z \leqslant x^2 - y^2\big\}\,.$$

Da der Integrand $f(x,y,z) = 1$ stetig ist, erhält man nach 42.1

$$I(A) = \iiint\limits_{A} d(x,y,z) = \iint\limits_{A_0} \left(\int_0^{x^2-y^2} dz \right) d(x,y) = \int_1^2 \int_{-x}^{x} \int_0^{x^2-y^2} dz\, dy\, dx$$
$$= \int_1^2 \int_{-x}^{x} (x^2 - y^2)\, dy\, dx = \int_1^2 \big[x^2 y - \tfrac{1}{3} y^3\big]_{y=-x}^{x}\, dx = \int_1^2 \tfrac{4}{3} x^3\, dx$$
$$= \big[\tfrac{1}{3} x^4\big]_{x=1}^2 = \tfrac{1}{3}(16-1) = 5\,.$$

b)



Die Menge B wird von den Koordinatenebenen und von der Ebene durch die drei Punkte $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,\frac{1}{2})$ begrenzt (siehe Skizze). Damit ist $(x,y,z) \in B$ äquivalent zu

$$0 \leqslant x \leqslant 1\,, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\,, \quad 0 \leqslant z \leqslant \tfrac{1}{2}(1 - x - y)\,.$$

Bei B handelt es sich also um

$$B = \big\{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in B_0\,,\ 0 \leqslant z \leqslant \tfrac{1}{2}(1-x-y)\ \big\}\,,$$
$$\text{wobei} \quad B_0 := \big\{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\,,\ 0 \leqslant y \leqslant 1 - x\ \big\}\,.$$

Da $(x,y,z) \mapsto \sin z$ auf $\mathbb{R}^3$ stetig ist, ergibt sich für das Integral nach (1) aus 42.1

$$\iiint\limits_{B} \sin z\, d(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{(1-x-y)/2} \sin z\, dz\, dy\, dx$$
$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \big[-\cos z\big]_{z=0}^{(1-x-y)/2}\, dy\, dx = \int_0^1 \int_0^{1-x} \Big(-\cos\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big) + 1\Big)\, dy\, dx$$
$$= \int_0^1 \big[2 \sin\big(\tfrac{1-x-y}{2}\big) + y\big]_{y=0}^{1-x}\, dx = \int_0^1 \Big(1 - x - 2\sin\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\Big)\, dx$$
$$= \big[x - \tfrac{1}{2}x^2 - 4\cos\big(\tfrac{1-x}{2}\big)\big]_{x=0}^1 = \big(1 - \tfrac{1}{2} - 4\cos 0\big) + 4\cos(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{7}{2} + 4\cos(\tfrac{1}{2})\,.$$

Aufgabe 6

a) Sei $0 < r < R$. Zur Berechnung von

$$\iint\limits_B \frac{y}{x}\, d(x,y)\,, \qquad B = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \in [r,R],\ |y| \leqslant x\big\}$$

führen wir Polarkoordinaten ein:

$$x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi \quad \text{mit } \varrho \in [r,R],\ \varphi \overset{(*)}{\in} [-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}].$$

(Hierbei ergibt sich $(*)$ durch die Bedingung $|y| \leqslant x$. Würde man $\varphi \in [0, 2\pi]$ fordern, so müsste man $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{7}{4}\pi, 2\pi]$ wählen und B in $B_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \in [r,R], 0 \leqslant y \leqslant x\}$ und $B_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \in [r,R], -x \leqslant y \leqslant 0\}$ zerlegen. Dann ist $\iint_B \frac{y}{x}\, d(x,y) = \iint_{B_1} \frac{y}{x}\, d(x,y) + \iint_{B_2} \frac{y}{x}\, d(x,y)$.) Wir erhalten

$$\iint\limits_B \frac{y}{x}\, d(x,y) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_r^R \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi = \tfrac{1}{2}(R^2 - r^2) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan\varphi\, d\varphi = 0.$$

Das letzte Gleichheitszeichen ergibt sich, weil der Tangens eine ungerade Funktion ist und über ein zu 0 symmetrisches Intervall integriert wird.

b) Wir greifen auf Zylinderkoordinaten zurück:

$$x = r\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\varphi\,, \qquad z = z\,, \qquad d(x,y,z) = r\, d(r,\varphi,z)\,.$$

Für $(x,y,z) \in B$ gilt $0 \leqslant z \leqslant 1$, und die zweite B definierende Ungleichung führt auf die Bedingung $r^2 \leqslant (1-z)^2$. Die Menge B ist also charakterisiert durch

$$0 \leqslant z \leqslant 1\,, \qquad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,, \qquad 0 \leqslant r \leqslant 1 - z\,.$$

Die Transformationsformel liefert nun

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_B (x^2+y^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, d(x,y,z) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{1-z} (r^2)^2\, e^{2(1-z)^7}\, r\, dr\, d\varphi\, dz \\
&= 2\pi \int_0^1 \int_0^{1-z} r^5 e^{2(1-z)^7}\, dr\, dz = 2\pi \int_0^1 \big[\tfrac{1}{6} r^6\big]_{r=0}^{1-z} e^{2(1-z)^7}\, dz \\
&= \int_0^1 \tfrac{1}{3}\pi(1-z)^6\, e^{2(1-z)^7}\, dz = \left[-\frac{\pi e^{2(1-z)^7}}{42}\right]_{z=0}^1 = \frac{\pi(e^2-1)}{42}\,.
\end{aligned}$$

c) Definiere $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant 1\}$. Dann müssen wir

$$m := \iiint\limits_B \varrho(x,y,z)\, d(x,y,z) = \iiint\limits_K \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\, d(x,y,z)$$

berechnen. Hierzu benutzen wir Kugelkoordinaten

$$x = r\cos\varphi\,\cos\vartheta, \quad y = r\sin\varphi\,\cos\vartheta, \quad z = r\sin\vartheta \qquad \text{mit } r \in [0,1],\ \varphi \in [0,2\pi],\ \vartheta \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}].$$

Die Transformationsformel liefert

$$\begin{aligned}
m &= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1+r^2}\, r^2 \cos\vartheta\, d\varphi\, d\vartheta\, dr \\
&= 2\pi \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^2}{1+r^2} \cos\vartheta\, d\vartheta\, dr \\
&= 4\pi \int_0^1 \frac{r^2}{1+r^2}\, dr = 4\pi \int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{1+r^2}\Big)\, dr \\
&= 4\pi\big(1 - [\arctan r]_{r=0}^1\big) = 4\pi\big(1 - (\tfrac{\pi}{4} - 0)\big) = 4\pi - \pi^2.
\end{aligned}$$