Karlsruher Institut für Technologie (KIT) Sommersemester 2011
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Die Funktionen $u(x,y) := \sin x \, \sin y$ und $v(x,y) := -\cos x \, \cos y$ sind offensichtlich auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Es gilt

$$\begin{aligned} D_1u(x,y) &= \cos x \, \sin y \,, \qquad & D_2u(x,y) &= \sin x \, \cos y \,, \\ D_1v(x,y) &= \sin x \, \cos y \,, \qquad & D_2v(x,y) &= \cos x \, \sin y \,. \end{aligned}$$

Wir prüfen die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (CRD) nach: $D_1u = D_2v$ ist immer erfüllt. $D_2u(x,y) = -D_1v(x,y)$ gilt genau dann, wenn $\sin x \, \cos y = 0$ ist, also wenn $x = k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ oder $y = (m + \frac{1}{2})\pi$ mit einem $m \in \mathbb{Z}$. Genau in diesen Punkten ist f komplex differenzierbar. Da die Menge

$$M := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z = k\pi \text{ für ein } k \in \mathbb{Z} \text{ oder } \operatorname{Im} z = (m + \tfrac{1}{2})\pi \text{ für ein } m \in \mathbb{Z} \right\}$$

nicht offen ist, liegt nirgends Holomorphie vor. Für $z = x + iy \in M$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ ergibt sich

$$f'(z) = D_1u(x,y) + iD_1v(x,y) = \cos x \, \sin y + i \underbrace{\sin x \, \cos y}_{=0, \text{ da } z \in M} = \cos x \, \sin y \,.$$

b) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $f(x+iy) = (x+iy)x = x^2 + ixy =: u(x,y) + iv(x,y)$. Die Funktionen $u, v \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind stetig differenzierbar mit

$$D_1u(x,y) = 2x \,, \qquad D_2u(x,y) = 0 \,, \qquad D_1v(x,y) = y \,, \qquad D_2v(x,y) = x \,.$$

Wegen

$$\begin{aligned} D_1u(x,y) = D_2v(x,y) \quad &\iff \quad 2x = x \quad \iff \quad x = 0 \,, \\ D_2u(x,y) = -D_1v(x,y) \quad &\iff \quad 0 = -y \quad \iff \quad y = 0 \end{aligned}$$

sind die CRD nur für $(x,y) = (0,0)$ erfüllt. Deshalb liegt nur in $z = 0$ komplexe Differenzierbarkeit vor. Da $\{0\} \subset \mathbb{C}$ nicht offen ist, ist f nirgendwo holomorph.

c) Hier ist $f \colon \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$. Für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt

$$f(x+iy) = \frac{x+iy}{x-iy} + \frac{x-iy}{x+iy} = \frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2} + \frac{(x-iy)^2}{x^2+y^2} = \frac{2x^2-2y^2}{x^2+y^2} \,.$$

Wir definieren $u \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $u(x,y) = \frac{2x^2-2y^2}{x^2+y^2}$, sowie $v \colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $v(x,y) = 0$. Dann erhalten wir für $(x,y) \neq (0,0)$

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = u(x,y) \,.$$

Offenbar sind u und v auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig differenzierbar; die Quotientenregel liefert

$$D_1u(x,y) = \frac{4x(x^2+y^2) - (2x^2-2y^2)2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^2}$$

und genauso

$$D_2u(x,y) = \frac{-8x^2y}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

außerdem gilt

$$D_1v(x,y) = D_2v(x,y) = 0\,.$$

Damit sind die CRD genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{8xy^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{-8x^2y}{(x^2+y^2)^2} = 0\,,$$

also wenn $x = 0$ oder $y = 0$ gilt. Die Funktion f ist somit nur auf der imaginären und der reellen Achse komplex differenzierbar (natürlich mit Ausnahme des Nullpunktes, wo sie gar nicht definiert ist). Hier lautet die Ableitung

$$f'(x+iy) = D_1u(x,y) + iD_1v(x,y) = 0\,.$$

Da $\{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \mid \operatorname{Re} z = 0 \text{ oder } \operatorname{Im} z = 0\}$ nicht offen ist, liegt Holomorphie nirgends vor.

Aufgabe 2

Da $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ist, gilt (vgl. Sätze 2 und 3 in 1.4 3)): u ist genau dann Realteil einer holomorphen Funktion, wenn u harmonisch ist, wenn also $\Delta u = 0$ gilt. Wegen

$$\begin{aligned}\Delta u(x,y) &= (D_1^2u)(x,y) + (D_2^2u)(x,y)\\ &= 12x^2 + 2\lambda y^2 + 12y^2 + 2\lambda x^2 = (12+2\lambda)(x^2+y^2)\end{aligned}$$

ist dies genau für $\lambda = -6$ der Fall.
Wir betrachten im folgenden daher $u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$. Nun benötigen wir alle Funktionen v mit $D_1v = -D_2u$ und $D_2v = D_1u$, d. h. die Funktionen v, die konjugiert harmonisch zu u sind. Die erste Forderung an v lautet

$$D_1v(x,y) = -D_2u(x,y) = -(4y^3 - 12x^2y) = -4y^3 + 12x^2y\,.$$

Hieraus folgt durch Integration bezüglich x: Es gilt $v(x,y) = -4xy^3 + 4x^3y + c(y)$ mit einer gewissen Funktion $c\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Damit ergibt sich

$$D_2v(x,y) = -12xy^2 + 4x^3 + c'(y)\,,$$

und dies soll $= D_1u(x,y) = 4x^3 - 12xy^2$ sein. Dazu muss $c'(y) = 0$ gelten, also c konstant sein. Damit haben wir die holomorphe Funktion f gefunden

$$\begin{aligned}f(x+iy) &= u(x,y) + iv(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2 + i(-4xy^3 + 4x^3y + c)\\ &= x^4 + 4ix^3y - 6x^2y^2 - 4ixy^3 + y^4 + ic = (x+iy)^4 + ic \qquad (c \in \mathbb{R})\,.\end{aligned}$$

Wir erhalten also: Genau die Funktionen der Form $f(z) = z^4 + ic$, wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig, haben $u(x,y) = x^4 + y^4 - 6x^2y^2$ als Realteil.

Aufgabe 3

Zum Nachweis der Schlichtheit von f auf G müssen wir begründen, dass f auf G holomorph und injektiv ist. Die Holomorphie ist klar, weil f eine Polynomfunktion ist. f ist auf G injektiv: Für alle $z_1, z_2 \in G$ gilt

$$\begin{aligned}|f(z_1) - f(z_2)| &= |z_1^2 - z_2^2 + 2z_1 - 2z_2| = |z_1 - z_2|\,|z_1 + z_2 + 2|\\ &\overset{(*)}{\geqslant} |z_1 - z_2|\,|2 - |z_1 + z_2|| \geqslant |z_1 - z_2|\,. \qquad (1)\end{aligned}$$

In $(*)$ verwendeten wir die umgekehrte Dreiecksungleichung und in der letzten Abschätzung $2 - |z_1 + z_2| > 1$, was aus $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ folgt. Aus der Ungleichung (1) ergibt sich sofort die Injektivität von f: Seien $z_1, z_2 \in G$ mit $f(z_1) = f(z_2)$. Dann ist $|f(z_1) - f(z_2)| = 0$ und wegen (1) muss $|z_1 - z_2| = 0$ gelten, also $z_1 = z_2$.
Zur Berechnung von $I(f(G))$ verwenden wir die Formel

$$I(f(G)) = \iint\limits_G |f'(x+iy)|^2 \, d(x,y)$$

aus 2.1 der Vorlesung. Wegen $f'(z) = 2(z+1)$ ist $|f'(z)|^2 = 4(z+1)(\overline{z}+1) = 4(|z|^2 + 2\operatorname{Re} z + 1)$ bzw. $|f'(x+iy)|^2 = 4(x^2 + y^2 + 2x + 1)$. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} I(f(G)) &= \iint\limits_G 4(x^2+y^2+2x+1)\, d(x,y) \overset{\text{Polarkoord.}}{=} \int_0^{1/2} \int_0^{2\pi} (4r^2 + 8r\cos\varphi + 4) r \, d\varphi \, dr \\ &= 2\pi \int_0^{1/2} (4r^3 + 4r)\, dr = 2\pi \big[r^4 + 2r^2\big]_0^{1/2} = \frac{9}{8}\pi\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a) Auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0 \text{ und } \operatorname{Re} z \in (-\infty, 0]\} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z = x \in \mathbb{R}$ und $x \in (-\infty, 0]\}$ sind die verschiedenen Zweige des Logarithmus gegeben durch

$$f_k(z) := \ln|z| + i\big(\arg(z) + 2k\pi\big)\,, \qquad \text{wobei } \arg(z) \in (-\pi, \pi) \text{ und } k \in \mathbb{Z}.$$

Nach Satz 3 in 2.3 ist $f_k \colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ schlicht. Wegen $G \subset \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist jede dieser Funktionen auch in G schlicht.

Bemerkung: Man hätte statt $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ auch ein anderes Holomorphiegebiet wählen können; der Schlitz muss nur außerhalb von G verlaufen.

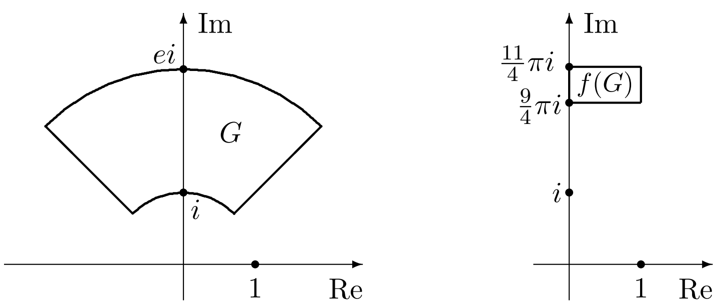
b) Für die oben definierten f_k gilt

$$f_k(i) = \ln|i| + i\arg(i) + 2k\pi i = 0 + i\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi i = (2k + \tfrac{1}{2})\pi i\,.$$

Somit ist die Forderung $\log(i) = \frac{5}{2}\pi i$ genau für $k = 1$ erfüllt; also ist $f_1 \colon \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ der gesuchte Zweig des Logarithmus.

Setze $f := f_1$. Für $z \in G$ durchläuft $|z|$ das Intervall $(1, e)$, also $\operatorname{Re} f(z) = \ln|z|$ das Intervall $(0, 1)$. Da $\arg(z)$ das Intervall $(\frac{1}{4}\pi, \frac{3}{4}\pi)$ überstreicht, muss $\operatorname{Im} f(z) = \arg(z) + 2\pi$ das Intervall $(\frac{9}{4}\pi, \frac{11}{4}\pi)$ durchlaufen. Insgesamt bedeutet dies

$$f(G) = \big\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in (0,1)\,,\ \operatorname{Im}(z) \in (\tfrac{9}{4}\pi, \tfrac{11}{4}\pi)\big\}\,.$$



c) Für $h(z) := e^z$ gilt $G = h\big(f(G)\big)$. Da h in $f(G)$ schlicht ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} I(G) = I\big(h(f(G))\big) &= \iint\limits_{f(G)} |h'(x+iy)|^2 \, d(x,y) = \int_{x=0}^{1} \int_{y=9\pi/4}^{11\pi/4} e^{2x} \, dy \, dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 e^{2x} \, dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{2x}}{2}\bigg|_{x=0}^{1} = \frac{\pi(e^2-1)}{4}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 5

a) Definitionsgemäß gilt für die Hauptzweige von Potenzfunktion und Logarithmus

$$z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Log} z}, \qquad \operatorname{Log} z = \ln|z| + i \arg z, \quad \text{wobei } \arg z \in (-\pi,\pi),\ \alpha \in \mathbb{C}.$$

• Mit $\operatorname{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\arg(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\pi/4$ ergibt sich

$$(1+i)^i = e^{i \operatorname{Log}(1+i)} = e^{i(\ln\sqrt{2}+i\pi/4)} = e^{i\ln\sqrt{2}-\pi/4} = e^{-\pi/4}\big(\cos(\ln\sqrt{2}\,) + i\sin(\ln\sqrt{2}\,)\big).$$

Man liest ab: $\operatorname{Re}((1+i)^i) = e^{-\pi/4}\cos(\frac{1}{2}\ln 2)$ und $\operatorname{Im}((1+i)^i) = e^{-\pi/4}\sin(\frac{1}{2}\ln 2)$.

• Wegen $\operatorname{Log} i = \ln|i| + i\arg i = i\pi/2$ gilt $i^i = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$, also

$$i^{(i^i)} = i^{(e^{-\pi/2})} = \exp(e^{-\pi/2}\operatorname{Log} i) = \exp(\tfrac{\pi}{2}e^{-\pi/2} i) = \cos(\tfrac{\pi}{2}e^{-\pi/2}) + i\sin(\tfrac{\pi}{2}e^{-\pi/2}).$$

Man sieht: $\operatorname{Re}(i^{(i^i)}) = \cos(\frac{\pi}{2}e^{-\pi/2})$ und $\operatorname{Im}(i^{(i^i)}) = \sin(\frac{\pi}{2}e^{-\pi/2})$.

• Wegen $\operatorname{Log} i = i\pi/2$ ergibt sich

$$\operatorname{Log}(\operatorname{Log} i) = \operatorname{Log}(i\pi/2) = \ln|i\pi/2| + i\arg(i\pi/2) = \ln(\pi/2) + i\pi/2.$$

Damit erhalten wir

$$(\operatorname{Log} i)^i = e^{i\operatorname{Log}(\operatorname{Log} i)} = e^{i\ln(\pi/2)-\pi/2} = e^{-\pi/2}\cos\big(\ln(\pi/2)\big) + ie^{-\pi/2}\sin\big(\ln(\pi/2)\big),$$

und Real- und Imaginärteil können unmittelbar abgelesen werden.

b) Die Gleichung $e^{1/z} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ ist genau dann erfüllt, wenn

$$\frac{1}{z} = i\,\frac{\pi}{2} + 2k\pi i = i\,\frac{(1+4k)\pi}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = -i\,\frac{2}{(1+4k)\pi}$$

mit einem gewissen $k \in \mathbb{Z}$ gilt, d.h. $\{z \in \mathbb{C} \mid e^{1/z} = i\} = \{\frac{-2i}{(1+4k)\pi} \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Aufgabe 6

a) Für $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}\sin(x+iy) &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \frac{(\cos x + i\sin x)e^{-y} - (\cos x - i\sin x)e^{y}}{2i}\\ &= -i\,\frac{\cos x\,(e^{-y}-e^{y}) + i\sin x\,(e^{-y}+e^{y})}{2} = \sin x\cosh y + i\cos x\sinh y.\end{aligned}$$

• Parallelen zur reellen Achse mit der Parametrisierung $z(x) = x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$ beliebig, $y \in \mathbb{R}$ fest) werden auf $w(x) = \sin(x+iy)$ abgebildet.

Im Falle $y = 0$ ergibt sich $w(x) = \sin x$ wegen $\cosh 0 = 1$ und $\sinh 0 = 0$. Die reelle Achse wird somit auf das Intervall $[-1,1]$ abgebildet.

Für $y \neq 0$ erhält man eine Ellipse (um 0) mit den Halbachsen $\cosh y$ und $|\sinh y|$.

• Betrachtet man das Bild einer Parallelen zur imaginären Achse, so erhält man die Parametrisierung $w(y) = \sin(x+iy)$, $y \in \mathbb{R}$ beliebig, $x \in \mathbb{R}$ fest.

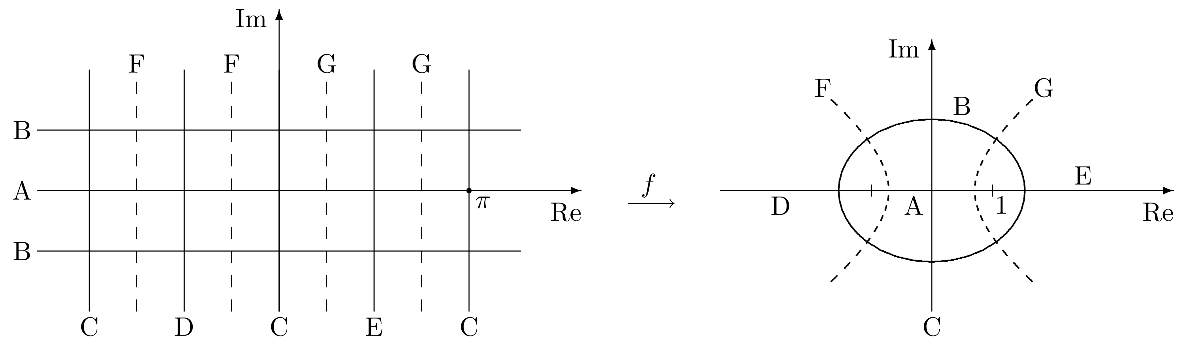
Für $x = k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ gilt $w(y) = i(-1)^k\sinh y$, also ergibt sich als Bild die imaginäre Achse.

Für $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$ ist $w(y) = (-1)^k\cosh y$, also bekommt man als Bild eine der beiden Halbgeraden $(-\infty,-1]$ und $[1,\infty)$.

In allen anderen Fällen ergeben sich Hyperbeläste, denn dann gilt

$$\left(\frac{\operatorname{Re} w(y)}{\sin x}\right)^2 - \left(\frac{\operatorname{Im} w(y)}{\cos x}\right)^2 = \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1.$$

Sämtliche Fälle sind in der folgenden Skizze aufgeführt:



b) Wegen $f'(z) = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ gilt $f'(z) = 0$ genau dann, wenn $e^{iz} = -e^{-iz}$, also wenn $e^{2iz} = -1 = e^{i\pi}$. Dies bedeutet $2z = \pi + 2k\pi$ mit einem $k \in \mathbb{Z}$. Also ist $f'(z_0) \neq 0$ genau für $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ erfüllt.

Nun sei $z_0 = x_0 + iy_0$ ein Punkt, in dem $f'(z_0) \neq 0$ gilt. Mit g bezeichnen wir die Parallele zur reellen Achse, die durch z_0 geht, und mit h die Parallele zur imaginären Achse durch z_0. Die Geraden g und h schneiden sich in z_0 im rechten Winkel. Wir wollen bestätigen, dass sich auch die Bilder dieser Geraden im Punkt $f(z_0)$ im rechten Winkel schneiden.

Betrachten wir zunächst die Sonderfälle:

Ist $y_0 = 0$, so ist $g = \mathbb{R}$ und $f(g) = [-1, 1]$. Für $x_0 = k\pi$ ist $f(h)$ die imaginäre Achse und diese steht senkrecht auf $[-1, 1]$. Der Fall $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ tritt wegen $f'(z_0) = 0$ nicht auf. Für beliebiges $x_0 \neq k\frac{\pi}{2}$ ist $f(h)$ ein Hyperbelast; er steht senkrecht auf $[-1, 1]$.

Ist $y_0 \neq 0$, so wird g auf eine Ellipse abgebildet. Für $x_0 = k\pi$ ist $f(h)$ die imaginäre Achse; sie steht senkrecht auf der Ellipse. Für $x_0 = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ist $f(h) = (-\infty, -1]$ oder $f(h) = [1, \infty)$; in beiden Fällen schneidet $f(h)$ die Ellipse senkrecht.

Nun der allgemeine Fall: $y_0 \neq 0$ und $x_0 \neq k\frac{\pi}{2}$. Dann ist $f(g)$ eine Ellipse und $f(h)$ ein Hyperbelast. Identifizieren wir $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$, so haben sie die Parametrisierungen

$$\vec{r}_{f(g)}(t) = (\cosh y_0 \, \sin t, \sinh y_0 \, \cos t) \qquad \text{und} \qquad \vec{r}_{f(h)}(t) = (\sin x_0 \, \cosh t, \cos x_0 \, \sinh t)\,.$$

Als Tangentenvektoren erhält man

$$\vec{r}_{f(g)}{}'(t) = (\cosh y_0 \, \cos t, -\sinh y_0 \, \sin t) \qquad \text{und} \qquad \vec{r}_{f(h)}{}'(t) = (\sin x_0 \, \sinh t, \cos x_0 \, \cosh t)\,.$$

Es folgt $\vec{r}_{f(g)}{}'(x_0) \cdot \vec{r}_{f(h)}{}'(y_0) = \sin x_0 \cos x_0 \sinh y_0 \cosh y_0 - \sin x_0 \cos x_0 \sinh y_0 \cosh y_0 = 0$. Also schneiden sich $f(g)$ und $f(h)$ in $f(z_0)$ auch in diesem Fall im rechten Winkel.

Bemerkung: Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $z_0 \in G$. Eine holomorphe Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ heißt *in z_0 konform*, falls $f'(z_0) \neq 0$ gilt. Ist f in z_0 konform, so ist f *in z_0 winkeltreu*, d.h. für alle Kurven $z_1(t), z_2(t)$ mit $z_1(0) = z_2(0) = z_0$, die in z_0 Tangenten besitzen, besitzen auch die Bildkurven $w_1(t) := f(z_1(t))$ und $w_2(t) := f(z_2(t))$ in $f(z_0)$ Tangenten und die Winkel zwischen beiden Tangentenpaaren stimmen nach Größe und Drehsinn überein.

Somit haben wir in dieser Teilaufgabe sämtliche Punkte, in denen f konform ist, bestimmt und die Winkeltreue von f für die Kurven aus **a)** bestätigt.