

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen  
 Elektroingenieurwesen und Physik inklusive  
 Komplexe Analysis und Integraltransformationen  
 Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt**

**Aufgabe 1**

- a) Eine Parametrisierung von  $\gamma$  ist  $\zeta(t) := -1 + t(1 + i) = (t - 1) + it$ , wobei  $t \in [0, 1]$ . Es gilt  $\zeta'(t) = 1 + i$  und wegen  $f(\zeta) = \zeta|\zeta|^2$  ist für jedes  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f(\zeta(t)) &= ((t - 1) + it)|((t - 1) + it)|^2 = ((t - 1) + it)((t - 1)^2 + t^2) \\ &= (t - 1)^3 + (t - 1)t^2 + i(t(t - 1)^2 + t^3) = (2t^3 - 4t^2 + 3t - 1) + i(2t^3 - 2t^2 + t). \end{aligned}$$

Folglich ergibt sich gemäß Definition des Kurvenintegrals

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta &= \int_0^1 f(\zeta(t))\zeta'(t) dt = \int_0^1 ((2t^3 - 4t^2 + 3t - 1) + i(2t^3 - 2t^2 + t))(1 + i) dt \\ &= (1 + i) \left( \frac{2}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} - 1 \right) + i(1 + i) \left( \frac{2}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = -\frac{1 + i}{3} + \frac{i - 1}{3} = -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

- b) Die Kurve  $\gamma$  ist der Rand des Quadrates mit den Eckpunkten  $0, 1, 1 + i$  und  $i$ , besteht also aus den vier Strecken

$$\gamma_1 : \zeta_1(t) = t, \quad \gamma_2 : \zeta_2(t) = 1 + it, \quad \gamma_3 : \zeta_3(t) = 1 - t + i, \quad \gamma_4 : \zeta_4(t) = i(1 - t),$$

wobei jeweils  $t \in [0, 1]$ . Man erhält

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta &= \sum_{k=1}^4 \int_{\gamma_k} f(\zeta) d\zeta = \sum_{k=1}^4 \int_0^1 f(\zeta_k(t))\zeta_k'(t) dt = \sum_{k=1}^4 \int_0^1 |\zeta_k(t)|^2 \zeta_k'(t) dt \\ &= \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 (1 + t^2)i dt + \int_0^1 ((1 - t)^2 + 1)(-1) dt + \int_0^1 (1 - t)^2(-i) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 - (1 - t)^2 - 1 + i(1 + t^2 - (1 - t)^2)) dt \\ &= \int_0^1 (2t - 2 + 2it) dt = -1 + i. \end{aligned}$$

**Aufgabe 2**

- a) Wir verwenden bei diesem Integranden die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{\zeta^2 + 1} = \frac{1}{(\zeta + i)(\zeta - i)} = \frac{i/2}{\zeta + i} - \frac{i/2}{\zeta - i}.$$

Da die Punkte  $-i$  und  $i$  im Inneren der Kreislinie  $|\zeta| = 2$  liegen und die Funktion  $\zeta \mapsto i\zeta^3/2$  im Gebiet  $G = \mathbb{C}$  holomorph ist, ergibt sich mit der Cauchyschen Integralformel

$$\begin{aligned} \oint_{|\zeta|=2} \frac{\zeta^3}{\zeta^2 + 1} d\zeta &= \oint_{|\zeta|=2} \frac{i\zeta^3/2}{\zeta - (-i)} d\zeta - \oint_{|\zeta|=2} \frac{i\zeta^3/2}{\zeta - i} d\zeta \\ &= 2\pi i \frac{i\zeta^3}{2} \Big|_{\zeta=-i} - 2\pi i \frac{i\zeta^3}{2} \Big|_{\zeta=i} = -\pi(-i)^3 + \pi i^3 = -2\pi i. \end{aligned}$$

b) Der Integrand lässt sich hier wie folgt umschreiben

$$\frac{e^\zeta}{\zeta^2 + 2\zeta} = \frac{e^\zeta}{\zeta(\zeta + 2)} = \frac{1}{2} \left( \frac{e^\zeta}{\zeta} - \frac{e^\zeta}{\zeta + 2} \right).$$

Der Punkt 0 liegt im Inneren des Integrationsweges, der Punkt  $-2$  dagegen im Äußeren. Folglich liefern die Cauchysche Integralformel und der Cauchysche Integralsatz

$$\oint_{|\zeta|=1} \frac{e^\zeta}{\zeta^2 + 2\zeta} d\zeta = \frac{1}{2} \left( \oint_{|\zeta|=1} \frac{e^\zeta}{\zeta - 0} d\zeta - \oint_{|\zeta|=1} \frac{e^\zeta}{\zeta + 2} d\zeta \right) = \frac{1}{2} (2\pi i e^\zeta|_{\zeta=0} - 0) = \pi i.$$

c) Für die durch  $f(\zeta) := \zeta e^{i\zeta}$  definierte, in  $\mathbb{C}$  holomorphe Funktion  $f$  gilt

$$f'(\zeta) = e^{i\zeta} + \zeta(i e^{i\zeta}) = (1 + i\zeta)e^{i\zeta}, \quad f''(\zeta) = i e^{i\zeta} + (1 + i\zeta)(i e^{i\zeta}) = (2i - \zeta)e^{i\zeta},$$

und wegen  $|\pi| < 4$  erhalten wir mit der Cauchyschen Integralformel für Ableitungen

$$\oint_{|\zeta|=4} \frac{\zeta e^{i\zeta}}{(\zeta - \pi)^3} d\zeta = 2\pi i \frac{f''(\pi)}{2!} = \pi i (2i - \zeta)e^{i\zeta}|_{\zeta=\pi} = \pi i (2i - \pi)(-1) = 2\pi + i\pi^2.$$

d) Die Nullstelle  $\zeta_0 = 7$  des Nenners des Integranden liegt außerhalb der Kreislinie  $|\zeta - 2| = 3$ , denn  $|7 - 2| = 5 > 3$ . Der Integrand ist also holomorph in dem konvexen und damit einfach zusammenhängenden Gebiet  $G := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - 2| < 5\}$ , in welchem auch der glatte, geschlossene Integrationsweg verläuft. Aus dem Cauchyschen Integralsatz folgt somit

$$\oint_{|\zeta-2|=3} \frac{e^{i \cos \zeta} \sin(\zeta^4 + 1) - \zeta}{(\zeta - 7)^{42}} d\zeta = 0.$$

### Aufgabe 3

Vorüberlegung: Will man

$$\frac{1}{z - a}$$

um den Punkt  $z_0 \neq a$  in eine Laurent-Reihe entwickeln, so gibt es dafür zwei Möglichkeiten. Für  $|z - z_0| < |a - z_0|$  hat man die Potenzreihen-Entwicklung

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - a} &= \frac{1}{(z - z_0) + (z_0 - a)} = \frac{1}{z_0 - a} \cdot \frac{1}{\frac{z - z_0}{z_0 - a} + 1} = \frac{1}{z_0 - a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{a - z_0}} \\ &= \frac{1}{z_0 - a} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{a - z_0} \right)^k = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(a - z_0)^{k+1}}. \end{aligned} \quad (*)$$

Für  $|z - z_0| > |a - z_0|$  dagegen ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - a} &= \frac{1}{(z - z_0) + (z_0 - a)} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z_0 - a}{z - z_0}} = \frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a - z_0}{z - z_0}} \\ &= \frac{1}{z - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{a - z_0}{z - z_0} \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}}. \end{aligned} \quad (**)$$

a) Für  $1 < |z| < 3$  gilt

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1 - z^2} + \frac{1}{3 - z} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{z^{-2} - 1} - \frac{1}{z - 3} = -\frac{1}{z^2} \cdot \frac{1}{1 - z^{-2}} - \frac{1}{z - 3} \\ &= -\frac{1}{z^2} \sum_{k=0}^{\infty} (z^{-2})^k - \frac{1}{z - 3} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2k+2}} - \frac{1}{z - 3} \stackrel{(*)}{=} -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^{2(k+1)}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{3^{k+1}}. \end{aligned}$$

- b) Die Partialbruchzerlegung des ersten Summanden von  $f(z)$  liefert die Darstellung

$$f(z) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-1} \right) - \frac{1}{z-3}.$$

Die Funktion  $f$  hat Polstellen in  $-1$ , in  $1$  und in  $3$ . Da die beiden Punkte  $-1$  und  $3$  von  $z_0 = 1$  den Abstand  $2$  haben, kommen als Gebiete für die Laurent-Entwicklung um  $z_0 = 1$  nur die beiden Kreisinge

$$0 < |z-1| < 2 \quad \text{und} \quad 2 < |z-1| < \infty$$

in Frage. Da der Punkt  $1 + 3i$  im Konvergenzgebiet liegen soll und von  $z_0$  den Abstand  $|1 + 3i - 1| = 3$  hat, ist der zweite Kreisring der richtige. Dort gilt gemäß (\*\*)

$$\frac{1}{z+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1-1)^k}{(z-1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{(z-1)^{k+1}}, \quad \frac{1}{z-3} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3-1)^k}{(z-1)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(z-1)^{k+1}}.$$

Also ergibt sich für  $|z-1| > 2$

$$f(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{(z-1)^{k+1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-1} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(z-1)^{k+1}} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{2}(-2)^k - 2^k}{(z-1)^{k+1}}.$$

#### Aufgabe 4

- a) Die Funktion  $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^4}$  hat in  $z_0 = 1$  einen Pol der Ordnung 4. Mit Hilfe der Formel aus Satz 1 in 7.1 sieht man

$$\text{Res}(f; 1) = \frac{1}{(4-1)!} \left( D^{4-1} \left( (z-1)^4 f(z) \right) \right) \Big|_{z=1} = \frac{1}{6} \left( D^3 e^z \right) \Big|_{z=1} = \frac{1}{6} e^z \Big|_{z=1} = \frac{e}{6}.$$

- b) Da  $f$  in  $z_0 = 1$  eine wesentliche Singularität besitzt, können wir nicht wie zuvor vorgehen. Wir bestimmen stattdessen die zugehörige Laurentreihe um  $1$  und lesen das Residuum ab

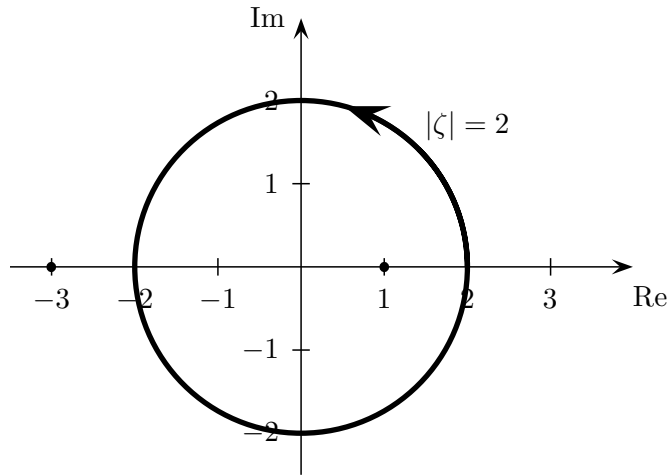
$$\begin{aligned} f(z) &= z e^{\frac{1}{1-z}} = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left( \frac{1}{1-z} \right)^n = ((z-1) + 1) \sum_{k=-\infty}^0 \frac{(-1)^k}{(-k)!} (z-1)^k \\ &= \sum_{k=-\infty}^0 \frac{(-1)^k}{(-k)!} (z-1)^{k+1} + \sum_{k=-\infty}^0 \frac{(-1)^k}{(-k)!} (z-1)^k \\ &= \sum_{l=-\infty}^1 \frac{(-1)^{l-1}}{(-(l-1))!} (z-1)^l + \sum_{k=-\infty}^0 \frac{(-1)^k}{(-k)!} (z-1)^k \\ &= (z-1) + \sum_{k=-\infty}^0 \left( \frac{(-1)^{k-1}}{(-(k-1))!} + \frac{(-1)^k}{(-k)!} \right) (z-1)^k, \quad z \neq 1. \end{aligned}$$

Das Residuum von  $f$  in  $1$  ist der Koeffizient von  $(z-1)^{-1}$ , also

$$\text{Res}(f; 1) = \frac{(-1)^{-2}}{2!} + \frac{-1}{1!} = -\frac{1}{2}.$$

### Aufgabe 5

- a) Der Integrand  $f(\zeta) := \frac{e^\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+3)^2}$  besitzt in 1 eine einfache und in  $-3$  eine doppelte Polstelle und ist holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{1, -3\}$ .



Da innerhalb des Integrationsweges  $|\zeta| = 2$  nur die Polstelle 1 liegt, liefert der Residuensatz

$$\oint_{|\zeta|=2} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 1) = \frac{e\pi i}{8},$$

denn für das Residuum von  $f$  in 1 gilt

$$\operatorname{Res}(f; 1) = (\zeta - 1)f(\zeta) \Big|_{\zeta=1} = \frac{e^\zeta}{(\zeta + 3)^2} \Big|_{\zeta=1} = \frac{e}{16}.$$

- b) Nun liegen die beiden Polstellen  $-3$  und  $1$  von  $f$  innerhalb des Integrationsweges  $|\zeta| = 9$ . Deswegen gilt nach dem Residuensatz

$$\oint_{|\zeta|=9} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \left( \operatorname{Res}(f; 1) + \operatorname{Res}(f; -3) \right) = 2\pi i \left( \frac{e}{16} - \frac{5e^{-3}}{16} \right) = \frac{(e - 5e^{-3})\pi i}{8},$$

da

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f; -3) &= \left( D \left( (\zeta + 3)^2 f(\zeta) \right) \right) \Big|_{\zeta=-3} = \left( D \frac{e^\zeta}{\zeta - 1} \right) \Big|_{\zeta=-3} = \left( \frac{e^\zeta(\zeta - 1) - e^\zeta}{(\zeta - 1)^2} \right) \Big|_{\zeta=-3} \\ &= \frac{-5e^{-3}}{16}. \end{aligned}$$

- c) Schreibe  $f(\zeta) := \frac{\zeta}{e^{i\zeta} - 1}$ . Der Nenner von  $f(\zeta)$  wird genau dann 0, wenn  $\zeta = 2k\pi$  mit einem  $k \in \mathbb{Z}$  gilt. Von diesen Punkten liegt nur  $\zeta = 0$  im Inneren des Kreises  $|\zeta| = 1$ . Daher ist

$$\oint_{|\zeta|=1} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 0).$$

Nun sieht man anhand der Darstellung

$$f(\zeta) = \frac{\zeta}{e^{i\zeta} - 1} = \frac{\zeta}{(1 + i\zeta + \frac{1}{2}(i\zeta)^2 + \dots) - 1} = \frac{\zeta}{i\zeta - \frac{1}{2}\zeta^2 + \dots} = \frac{1}{i - \frac{1}{2}\zeta + \dots},$$

dass in  $\zeta = 0$  eine hebbare Singularität von  $f$  vorliegt. Deshalb gilt  $\operatorname{Res}(f; 0) = 0$  und das Integral hat den Wert 0.

d) Sei  $f(\zeta) := e^{\frac{\zeta}{1-\zeta}}$ . Hier liefert der Residuensatz

$$\oint_{|\zeta|=2} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \operatorname{Res}(f; 1).$$

Um das Residuum  $\operatorname{Res}(f; 1)$  zu berechnen, betrachten wir die Laurententwicklung von  $f$  um 1

$$f(\zeta) = \exp\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right) = \exp\left(-1 + \frac{1}{1-\zeta}\right) = e^{-1} e^{-1/(\zeta-1)} = e^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} (\zeta-1)^{-k};$$

der Koeffizient von  $(\zeta-1)^{-1}$  lautet  $-e^{-1}$ . Also ist  $\operatorname{Res}(f; 1) = -e^{-1}$  und damit

$$\oint_{|\zeta|=2} \exp\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right) d\zeta = -\frac{2\pi i}{e}.$$

e) Der Integrand  $f(\zeta) := \frac{2\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+2)(\zeta+i)}$  besitzt in  $1, -2, -i$  jeweils einen Pol erster Ordnung und ist holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{1, -2, -i\}$ . Da sich alle Polstellen im Inneren von  $G$  befinden, ergibt sich nach dem Residuensatz

$$\oint_{\partial G} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \left( \operatorname{Res}(f; 1) + \operatorname{Res}(f; -2) + \operatorname{Res}(f; -i) \right).$$

Wir berechnen nun die Residuen von  $f$  in den (einfachen) Polstellen

$$\operatorname{Res}(f; 1) = (\zeta-1)f(\zeta) \Big|_{\zeta=1} = \frac{2\zeta}{(\zeta+2)(\zeta+i)} \Big|_{\zeta=1} = \frac{2}{3(1+i)} = \frac{1}{3}(1-i),$$

$$\operatorname{Res}(f; -2) = (\zeta+2)f(\zeta) \Big|_{\zeta=-2} = \frac{2\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+i)} \Big|_{\zeta=-2} = \frac{4}{3(-2+i)} = -\frac{4}{15}(2+i),$$

$$\operatorname{Res}(f; -i) = (\zeta+i)f(\zeta) \Big|_{\zeta=-i} = \frac{2\zeta}{(\zeta-1)(\zeta+2)} \Big|_{\zeta=-i} = \frac{2i}{(i+1)(-i+2)} = \frac{1}{5}(1+3i).$$

Hiermit ist

$$\oint_{\partial G} f(\zeta) d\zeta = 2\pi i \left( \frac{1}{3}(1-i) - \frac{4}{15}(2+i) + \frac{1}{5}(1+3i) \right) = 0.$$

## Aufgabe 6

Als Hintereinanderausführung holomorpher Funktionen ist die Funktion  $f$  auf ganz  $\mathbb{C}$  holomorph. Sie lässt sich also um  $z_0 = 0$  in eine Potenzreihe entwickeln

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n.$$

Diese Potenzreihe konvergiert auf der größten Kreisscheibe um  $z_0 = 0$ , auf der  $f$  holomorph ist. Hier konvergiert die Potenzreihe also für jedes  $z \in \mathbb{C}$ .

Der Integrand  $\zeta f(1/\zeta)$  ist holomorph auf  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  und für  $\zeta \neq 0$ , insbesondere also für  $0 < |\zeta| < 1$ , gilt nach den obigen Überlegungen

$$\zeta f(1/\zeta) = \zeta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \zeta^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \zeta^{1-n}.$$

Nach dem Residuensatz gilt dann

$$\oint_{|\zeta|=1/2} \zeta e^{\sin(1/\zeta)} d\zeta = \int_{|z|=1/2} \zeta f(1/\zeta) d\zeta = 2\pi i \operatorname{Res}(\zeta f(1/\zeta); 0),$$

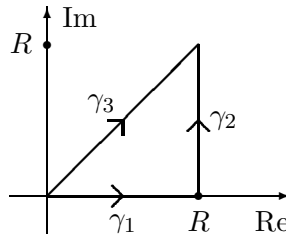
und Ablesen an der Laurentreihe für  $\zeta f(1/\zeta)$  ergibt

$$= 2\pi i \frac{f''(0)}{2}.$$

Wegen  $f'(z) = \cos(z)f(z)$ ,  $f''(z) = -\sin(z)f(z) + \cos^2(z)f(z)$  und  $f(0) = 1$  ist  $f''(0) = 1$ . Das Integral ist also gleich

$$2\pi i \frac{1}{2} = \pi i.$$

## Aufgabe 7



- a) Im einfach zusammenhängenden Gebiet  $\mathbb{C}$  ist  $f(\zeta) := e^{-\zeta^2}$  holomorph, und durch Aneinanderhängen von  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  und  $-\gamma_3$  erhält man eine geschlossene, positiv orientierte Kurve  $\gamma$ . Führen wir die Schreibweise  $I(\Gamma) := \int_{\Gamma} f(\zeta) d\zeta$  ein, so liefert der Cauchysche Integralsatz

$$0 = I(\gamma) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2) + I(-\gamma_3) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2) - I(\gamma_3).$$

Damit ergibt sich  $I(\gamma_3) = I(\gamma_1) + I(\gamma_2)$ , also die behauptete Gleichung.

- b) Es gilt  $\zeta_2^2(t) = (R + it)^2 = R^2 + 2iRt - t^2$  und  $\zeta_2'(t) = i$ . Damit erhalten wir

$$|I(\gamma_2)| = \left| \int_0^R e^{-\zeta_2^2(t)} \zeta_2'(t) dt \right| \leq \int_0^R |e^{-R^2 - 2iRt + t^2} i| dt = \int_0^R e^{t^2 - R^2} dt.$$

Wegen der für alle  $t \in [0, R]$  gültigen Abschätzung  $t^2 \leq Rt$  bekommen wir folglich

$$|I(\gamma_2)| \leq \int_0^R e^{Rt - R^2} dt = \left[ \frac{e^{Rt - R^2}}{R} \right]_{t=0}^R = \frac{1 - e^{-R^2}}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

und damit ist  $I(\gamma_2) \rightarrow 0$  für  $R \rightarrow \infty$  bewiesen.

*Bemerkung:* Die Standardabschätzung für Kurvenintegrale hätte hier nicht ausgereicht, denn es gilt  $L(\gamma_2) = R$  und  $\max\{|f(\zeta)| : \zeta \in \gamma_2\} = 1$ .

- c) Wir betrachten nun noch  $I(\gamma_1)$  und  $I(\gamma_3)$ . Für das erste Kurvenintegral erhalten wir

$$I(\gamma_1) = \int_0^R e^{-\zeta_1^2(t)} \zeta_1'(t) dt = \int_0^R e^{-t^2} dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

und wegen  $\zeta_3^2(t) = t^2(1+i)^2 = 2it^2$  und  $\zeta_3'(t) = 1+i$  gilt

$$I(\gamma_3) = \int_0^R e^{-\zeta_3^2(t)} \zeta_3'(t) dt = \int_0^R e^{-2it^2} (1+i) dt \xrightarrow{R \rightarrow \infty} (1+i) \int_0^{\infty} e^{-2it^2} dt.$$

(Dieses uneigentliche Integral muss wegen der Konvergenz von  $I(\gamma_1)$  und  $I(\gamma_2)$  sowie der in **a)** bewiesenen Gleichung existieren.) Mit der Substitution  $x = \sqrt{2}t$  ergibt sich

$$I(\gamma_3) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} (1+i) \int_0^{\infty} e^{-ix^2} \frac{dx}{\sqrt{2}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} [\cos(x^2) - i \sin(x^2)] dx.$$

Beim Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$  folgt also mit **b)** aus der in **a)** bewiesenen Gleichung

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} [\cos(x^2) - i \sin(x^2)] dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} + 0.$$

Für die beiden Integrale  $C := \int_0^{\infty} \cos(x^2) dx$  und  $S := \int_0^{\infty} \sin(x^2) dx$  hat man somit

$$(1+i)(C - iS) = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}, \quad \text{d. h.} \quad (C + S) + i(C - S) = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}.$$

Hieraus folgen die Gleichungen  $C + S = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}$  und  $C - S = 0$ , also ist  $C = S = \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}$ .

## Aufgabe 8

Das zu berechnende Integral ist von der Form

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt, \quad \text{mit } R(x, y) := \frac{y}{5 - 4y}.$$

Ein solches Integral lässt sich als Kurvenintegral schreiben: Laut Satz 3 in 7.2 gilt

$$\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t) dt = \oint_{|z|=1} f(z) dz, \quad \text{wobei } f(z) := \frac{1}{iz} R\left(\frac{z^2 - 1}{2iz}, \frac{z^2 + 1}{2z}\right).$$

Der Integrand des Kurvenintegrals ist

$$f(z) = \frac{1}{iz} \cdot \frac{\frac{z^2+1}{2z}}{5 - 4\frac{z^2+1}{2z}} = \frac{1}{iz} \cdot \frac{z^2 + 1}{10z - 4(z^2 + 1)} = \frac{z^2 + 1}{-i(4z^3 - 10z^2 + 4z)}.$$

Diese Funktion  $f$  hat die Nullstellen des Nenners als isolierte Singularitäten: Wegen

$$4z^3 - 10z^2 + 4z = 4z(z^2 - \frac{5}{2}z + 1) = 4z(z - 2)(z - \frac{1}{2})$$

sind dies  $z_0 = 0$ ,  $z_1 = 2$  und  $z_2 = \frac{1}{2}$ . Da der Punkt  $z_1 = 2$  außerhalb des von der Integrationskurve umschlossenen Gebietes  $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$  liegt, die Punkte  $z_0 = 0$  und  $z_2 = \frac{1}{2}$  aber innerhalb, liefert der Residuensatz

$$\oint_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i (\text{Res}(f; 0) + \text{Res}(f; \frac{1}{2})).$$

In  $z_0 = 0$  und  $z_2 = \frac{1}{2}$  hat der Nenner von  $f(z)$  einfache Nullstellen, der Zähler ist  $\neq 0$ . Somit sind 0 und  $\frac{1}{2}$  Polstellen erster Ordnung und für die Residuen erhält man nach Satz 2 in 7.1

$$\text{Res}(f; 0) = \frac{z^2 + 1}{-i(4z^3 - 10z^2 + 4z)} \Big|_{z=0} = \frac{z^2 + 1}{-i(12z^2 - 20z + 4)} \Big|_{z=0} = -\frac{1}{4i},$$

$$\text{Res}(f; \frac{1}{2}) = \frac{z^2 + 1}{-i(12z^2 - 20z + 4)} \Big|_{z=1/2} = \frac{\frac{1}{4} + 1}{-i(3 - 10 + 4)} = \frac{\frac{5}{4}}{3i} = \frac{5}{12i}.$$

Damit ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos t}{5 - 4 \cos t} dt = 2\pi i \left( -\frac{1}{4i} + \frac{5}{12i} \right) = 2\pi i \frac{1}{6i} = \frac{\pi}{3}.$$