Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2011

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Mit $g(t) := h(t)(t^2 + bt + c)$ erhält man nach Beispiel 2) in 8.4 wegen der Linearität von $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}(g)(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s} \qquad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0\,,$$

und wegen $f(t) = e^{at}g(t)$ gilt dann nach der Dämpfungsregel 10.3

$$\mathscr{L}(f)(s) = \mathscr{L}(g)(s-a) = \frac{2}{(s-a)^3} + \frac{b}{(s-a)^2} + \frac{c}{s-a} \qquad \text{für } \operatorname{Re}(s) > a\,.$$

b) Wir benutzen die Darstellung $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$. Nach der Dämpfungsregel ist

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f)(s) &= \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}(h(t)e^{i\omega t})(s) + \mathscr{L}(h(t)e^{-i\omega t})(s)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}(h)(s-i\omega) + \mathscr{L}(h)(s+i\omega)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-i\omega} + \frac{1}{s+i\omega}\Big) = \frac{1}{2}\frac{(s+i\omega)+(s-i\omega)}{s^2 - i^2\omega^2} = \frac{s}{s^2+\omega^2} \qquad \text{für } \operatorname{Re}(s) > 0\,.\end{aligned}$$

Bemerkung: a) Mit $\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$ erhält man $\mathscr{L}(\sin(\omega t))(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$ für $\operatorname{Re}(s) > 0$.
b) Alternativ könnte man $\mathscr{L}(\cos(\omega t))$ im Fall $\omega > 0$ auch mit $\mathscr{L}(\cos(t))(s) = \frac{s}{s^2+1}$ und dem Skalierungsresultat aus 10.1 berechnen: Hiernach gilt nämlich für jedes $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\mathscr{L}(\cos(\omega t)) = \frac{1}{\omega}\mathscr{L}(\cos(t))\Big(\frac{s}{\omega}\Big) = \frac{1}{\omega}\frac{s/\omega}{(s/\omega)^2+1} = \frac{s}{s^2+\omega^2}\,.$$

c) Es ist $\sinh(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$. Da die Laplacetransformation linear ist, bekommen wir nach der Dämpfungsregel für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > |\omega|$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f)(s) &= \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}(h(t)e^{\omega t})(s) - \mathscr{L}(h(t)e^{-\omega t})(s)\Big) = \frac{1}{2}\Big(\mathscr{L}(h)(s-\omega) - \mathscr{L}(h)(s+\omega)\Big)\\ &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-\omega} - \frac{1}{s+\omega}\Big) = \frac{1}{2}\frac{(s+\omega)-(s-\omega)}{s^2-\omega^2} = \frac{\omega}{s^2-\omega^2}\,.\end{aligned}$$

Wir mussten hier $\operatorname{Re}(s) > |\omega|$ fordern, damit sowohl $\mathscr{L}(h(t)e^{\omega t})(s)$ als auch $\mathscr{L}(h(t)e^{-\omega t})(s)$ existieren. Bekanntlich liegt Konvergenz von $\mathscr{L}(h(t)e^{\omega t})(s)$ nur für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \omega$ vor, entsprechend konvergiert $\mathscr{L}(h(t)e^{-\omega t})(s)$ nur für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > -\omega$. Beide Bedingungen an s sind für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > |\omega|$ erfüllt.

d) Wir drücken die Funktion f zunächst mit Hilfe der Exponentialfunktion aus: Es ist

$$f(t) = \sinh^2(\omega t) = \Big(\frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2}\Big)^2 = \frac{e^{2\omega t} - 2 + e^{-2\omega t}}{4}\,.$$

Damit folgt für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > 2|\omega|$ (analoge Begründung wie zuvor im c)-Teil)

$$4\mathscr{L}(f)(s) = \mathscr{L}(h(t)e^{2\omega t})(s) - \mathscr{L}(2h)(s) + \mathscr{L}(h(t)e^{-2\omega t})(s) = \frac{1}{s-2\omega} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2\omega}\,,$$

und als Endergebnis erhalten wir für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 2|\omega|$

$$\mathscr{L}(f)(s) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-2\omega} + \frac{1}{s+2\omega}\right) - \frac{1}{2s} = \frac{s}{2(s^2-4\omega^2)} - \frac{1}{2s} = \frac{2\omega^2}{s(s^2-4\omega^2)}\,.$$

e) Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(a)$ gilt nach der Dämpfungsregel und der Bemerkung a) im b)-Teil

$$\mathscr{L}(f)(s) = \mathscr{L}(h\sin(b\,\cdot))(s-a) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}\,.$$

f) Für jedes $t \geqslant 0$ gilt nach dem Additionstheorem des Sinus

$$f(t) = \sin(\omega t)\cos\varphi + \cos(\omega t)\sin\varphi\,.$$

Hieraus folgt mit Hilfe des b)- und e)-Teils für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\mathscr{L}(f)(s) = \cos\varphi\,\mathscr{L}(h\sin(\omega\,\cdot))(s) + \sin\varphi\,\mathscr{L}(h\cos(\omega\,\cdot))(s) = \cos\varphi\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2} + \sin\varphi\,\frac{s}{s^2+\omega^2}\,.$$

Bemerkung: Falls $\mathscr{L}(h\sin(\omega\,\cdot))$ und $\mathscr{L}(h\cos(\omega\,\cdot))$ noch nicht bekannt sind, kann man $\mathscr{L}(f)$ auch folgendermaßen berechnen: Die Funktion f erfüllt

$$\begin{aligned} f''(t) &= -\omega^2 f(t) \qquad \text{für alle } t \geqslant 0\,,\\ f(0) &= \sin\varphi\,, \quad f'(0) = \omega\cos\varphi\,. \end{aligned}$$

Aufgrund der Linearität von $\mathscr{L}$ folgt für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\mathrm{Re}(s)$

$$0 = \mathscr{L}(0)(s) = \mathscr{L}(f'' + \omega^2 f)(s) = \mathscr{L}(f'')(s) + \omega^2\mathscr{L}(f)(s)\,. \tag{1}$$

Außerdem gilt nach dem Differentiationssatz 10.4

$$\mathscr{L}(f'')(s) = s^2\mathscr{L}(f)(s) - \big(sf(0+) + f'(0+)\big)\,.$$

Setzt man dies in (1) ein und verwendet $f(0) = \sin\varphi$, $f'(0) = \omega\cos\varphi$ unter Berücksichtigung der Stetigkeit von f und f' in 0, so erhält man

$$0 = (s^2+\omega^2)\mathscr{L}(f)(s) - (s\sin\varphi + \omega\cos\varphi)\,,$$

also

$$\mathscr{L}(f)(s) = \frac{s\sin\varphi + \omega\cos\varphi}{s^2+\omega^2}\,.$$

g) Für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ gilt $\mathscr{L}(h\sin)(s) = \frac{1}{s^2+1}$. Definiere $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $g(t) = e^t\sin(t)$ für $t \geqslant 0$ und $g(t) = 0$ für $t < 0$. Dann liefert die Dämpfungsregel

$$\mathscr{L}(g)(s) = \mathscr{L}(h\sin)(s-1) = \frac{1}{(s-1)^2+1} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 1\,.$$

Wegen $f(t) = g(t-1)$ haben wir nach der Verschiebungsregel

$$\mathscr{L}(f)(s) = e^{-1\cdot s}\mathscr{L}(g)(s) = \frac{e^{-s}}{(s-1)^2+1} \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 1\,.$$

h) Nach Definition ist

$$\mathscr{L}(f)(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt = \int_0^1 e^{-st}t\,dt + \int_1^2 e^{-st}(2-t)\,dt\,.$$

Diese Integrale sind für alle $s \in \mathbb{C}$ (absolut) konvergent. Wir unterscheiden zwei Fälle:
Für $s = 0$ ist $\mathscr{L}(f)(s) = \int_0^1 t\,dt + \int_1^2 (2-t)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Im Fall $s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ liefert partielle Integration

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}(f)(s) &= \int_0^1 e^{-st} t\,dt + \int_1^2 e^{-st}(2-t)\,dt \\
&= \Big(\frac{e^{-st}}{-s} t\Big)\Big|_{t=0}^1 - \int_0^1 \frac{e^{-st}}{-s}\,dt + \Big(\frac{e^{-st}}{-s}(2-t)\Big)\Big|_{t=1}^2 - \int_1^2 \frac{e^{-st}}{s}\,dt \\
&= -\frac{1}{s}e^{-s} - \Big(\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big)\Big|_{t=0}^1 + \frac{1}{s}e^{-s} + \Big(\frac{1}{s^2}e^{-st}\Big)\Big|_{t=1}^2 \\
&= \frac{1}{s^2}\Big(-e^{-s}+1\Big) + \frac{1}{s^2}\Big(e^{-2s} - e^{-s}\Big) \\
&= \frac{1}{s^2}\Big(e^{-2s} - 2e^{-s} + 1\Big) = \frac{1}{s^2}\Big(e^{-s} - 1\Big)^2 .
\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Da die Funktion f auf $[0,\infty)$ $2a$-periodisch ist, lässt sich $\mathscr{L}(f)$ nach Satz 2 in 8.4 durch

$$\mathscr{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-2as}} \int_0^{2a} e^{-st} f(t)\,dt, \qquad \mathrm{Re}(s) > 0, \tag{2}$$

berechnen. Um das Integral $\int_0^{2a} e^{-st} f(t)\,dt$ zu bestimmen, definieren wir

$$g(t) := \begin{cases} t & \text{für } 0 \leqslant t < 1 \\ 2-t & \text{für } 1 \leqslant t < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Dann gilt gemäß Aufgabe 1 h): $\mathscr{L}(g)(s) = \frac{1}{s^2}(e^{-s}-1)^2$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$. Ist

$$g_a(t) := g(t/a) = \begin{cases} t/a & \text{für } 0 \leqslant t < a \\ 2-t/a & \text{für } a \leqslant t < 2a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

gesetzt, so folgt mit dem Skalierungsresultat aus 10.1

$$\mathscr{L}(g_a)(s) = \frac{1}{1/a}\mathscr{L}(g)\Big(\frac{s}{1/a}\Big) = \frac{1}{as^2}(e^{-as}-1)^2, \qquad \mathrm{Re}(s) > 0 .$$

Nun gilt aber $f(t) = g_a(t)$ für alle $t \in [0,2a)$; da ferner $g_a(t) = 0$ für alle $t \geqslant 2a$ ist, ergibt sich für $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\int_0^{2a} e^{-st} f(t)\,dt = \mathscr{L}(g_a)(s) = \frac{1}{as^2}(e^{-as}-1)^2 .$$

[Natürlich könnte man $\int_0^{2a} e^{-st} f(t)\,dt$ auch direkt mittels partieller Integration berechnen.] Mit (2) folgt hieraus für jedes $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\mathscr{L}(f)(s) = \frac{1}{1-e^{-2as}} \cdot \frac{1}{as^2}(e^{-as}-1)^2 = \frac{1}{as^2} \cdot \frac{(e^{-as}-1)^2}{(1-e^{-as})(1+e^{-as})} = \frac{1}{as^2} \cdot \frac{1-e^{-as}}{1+e^{-as}} .$$

Aufgabe 3

a) Für f, definiert durch $f(t) = e^{at}$ für $t \geqslant 0$ und $f(t) = 0$ für $t < 0$, ergibt sich $\mathscr{L}(f)(s) = \frac{1}{s-a}$.

b) Wir definieren zunächst $g(t) = e^{-2t}$ für $t \geqslant 0$ und $g(t) = 0$ für $t < 0$. Dann gilt $\mathscr{L}(g)(s) = \frac{1}{s+2}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > -2$. Ist $f(t) := g(t-3)$ gesetzt, so gilt nach der Verschiebungsregel

$$\frac{e^{-3s}}{s+2} = e^{-3s}\mathscr{L}(g)(s) = \mathscr{L}(f)(s) .$$

c) Aufgrund von $\mathscr{L}(h(t)\cos(2t))(s) = \frac{s}{s^2+2^2}$ und $\mathscr{L}(h(t)\sin(2t))(s) = \frac{2}{s^2+2^2}$ bekommen wir mit Hilfe der Linearität von $\mathscr{L}$ und der Dämpfungsregel

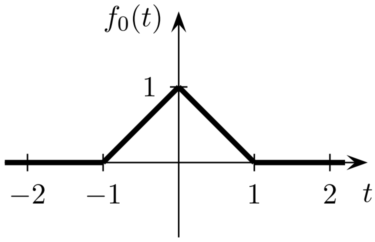
$$\begin{aligned}\frac{s+3}{(s+1)^2+4} &= \frac{s+1}{(s+1)^2+4} + \frac{2}{(s+1)^2+4} = \mathscr{L}(h(t)\cos(2t))(s+1) + \mathscr{L}(h(t)\sin(2t))(s+1)\\ &= \mathscr{L}(h(t)(\cos(2t)+\sin(2t)))(s+1) = \mathscr{L}(h(t)e^{-t}(\cos(2t)+\sin(2t)))(s)\,.\end{aligned}$$

Demnach gilt $\mathscr{L}(f)(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2+4}$ für $f(t) := \begin{cases} e^{-t}(\cos(2t)+\sin(2t)) & \text{für } t \geqslant 0,\\ 0 & \text{für } t < 0.\end{cases}$

Aufgabe 4

a) Wir betrachten zunächst den Spezialfall $t_0 = 0$ und überlegen uns den allgemeinen Fall anschließend.

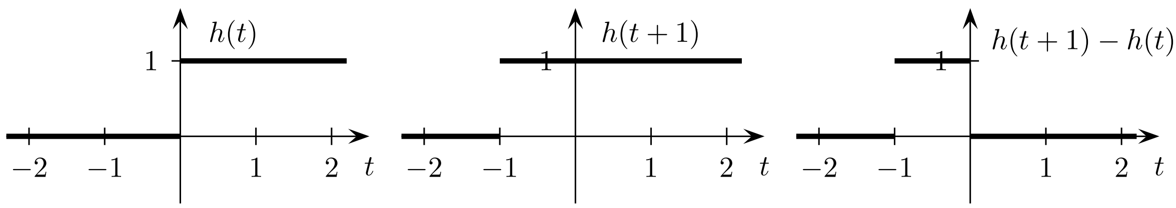
Die zu $t_0 = 0$ gehörige Funktion bezeichnen wir durch f_0. Es ist also



Hieraus kann man sofort

$$f_0(t) = \begin{cases} 1+t & t\in[-1,0)\\ 1-t & t\in[0,1)\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

ablesen. Diese Fallunterscheidung wollen wir mit Hilfe der Heaviside-Funktion h ausdrücken. Wie man sich anhand der Graphen



leicht überlegt, gilt

$$h(t+1)-h(t) = \begin{cases} 1 & t\in[-1,0),\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Analog erhält man

$$h(t)-h(t-1) = \begin{cases} 1 & t\in[0,1),\\ 0 & \text{sonst.}\end{cases}$$

Hiermit lässt sich f_0 in dem geschlossenen Ausdruck

$$f_0(t) = \big(h(t+1)-h(t)\big)(1+t) + \big(h(t)-h(t-1)\big)(1-t)\,, \qquad t\in\mathbb{R}\,,$$

schreiben. Die ursprüngliche Funktion f gewinnen wir durch Verschiebung von f_0 um t_0 zurück. Deshalb folgt für jedes $t\in\mathbb{R}$

$$f(t) = f_0(t-t_0) = \big(h(t-t_0+1)-h(t-t_0)\big)(1+t-t_0) + \big(h(t-t_0)-h(t-t_0-1)\big)(1-t+t_0)\,.$$

Ein etwas eleganterer Weg wäre, $f_0(t) = \big(h(t+1)-h(t-1)\big)(1-|t|) = \begin{cases} 1-|t| & t\in[-1,1)\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$ zu schreiben und wie eben zu verschieben.

b) Wir haben für alle $t \in \mathbb{R}$

$$g(t) = \begin{cases} 2 & t \in [-1,0) \\ 1 & t \in [1,2) \\ 2t-3 & t \in [2,3) \\ -1 & t \in [3,4) \\ 6-t & t \in [4,5) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und damit

$$\begin{aligned} g(t) =& 2\big(h(t+1) - h(t)\big) + \big(h(t-1) - h(t-2)\big) + (2t-3)\big(h(t-2) - h(t-3)\big) \\ &- \big(h(t-3) - h(t-4)\big) + (6-t)\big(h(t-4) - h(t-5)\big)\,. \end{aligned}$$

c) Zuerst geben wir die Funktion f mit Hilfe der Heaviside-Funktion h in einem geschlossenen Ausdruck an. Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} f(t) &= 2\big(h(t-1) - h(t-2)\big) + \big(h(t-2) - h(t-3)\big) + 3\big(h(t-3) - h(t-4)\big) \\ &\quad - \big(h(t-4) - h(t-6)\big) \\ &= 2h(t-1) - h(t-2) + 2h(t-3) - 4h(t-4) + h(t-6)\,. \end{aligned}$$

Nach der Verschiebungsregel gilt für jedes $a \geqslant 0$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\mathscr{L}(h(t-a))(s) = e^{-as}\mathscr{L}(h)(s) = \frac{e^{-as}}{s}\,.$$

Hiermit ergibt sich aufgrund der Linearität von $\mathscr{L}$

$$\mathscr{L}(f)(s) = \frac{1}{s}\big(2e^{-s} - e^{-2s} + 2e^{-3s} - 4e^{-4s} + e^{-6s}\big) \qquad \text{für } \mathrm{Re}(s) > 0\,.$$

Aufgabe 5

Wir wollen eine Lösung von

$$\begin{aligned} m\,u''(t) + \kappa\,u(t) &= 0 \qquad \text{für alle } t \geqslant 0 \\ u(0) = 0, \quad u'(0) &= v_0 \end{aligned}$$

bestimmen. Hierbei sind $m, \kappa, v_0 > 0$ fest vorgegebene Zahlen. Wendet man die Laplacetransformation $\mathscr{L}$ auf obige Gleichung an, so ergibt sich für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\mathrm{Re}(s)$

$$m\mathscr{L}(u'')(s) + \kappa\mathscr{L}(u)(s) = 0$$

bzw. mit $\mathscr{L}(u'')(s) = s^2\mathscr{L}(u)(s) - su(0) - u'(0)$ und den Anfangswerten $u(0) = 0, u'(0) = v_0$

$$m(s^2\mathscr{L}(u)(s) - v_0) + \kappa\mathscr{L}(u)(s) = 0\,.$$

Auflösen nach $\mathscr{L}(u)(s)$ liefert

$$\mathscr{L}(u)(s) = \frac{mv_0}{ms^2 + \kappa} = \frac{v_0}{s^2 + \frac{\kappa}{m}}\,.$$

Ist $\omega := \sqrt{\frac{\kappa}{m}}$ gesetzt, so erhalten wir

$$\mathscr{L}(u)(s) = \frac{v_0}{s^2 + \omega^2} = \frac{v_0}{\omega}\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

und wegen $\mathscr{L}(\sin(\omega t))(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$\mathscr{L}(u)(s) = \frac{v_0}{\omega}\frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{v_0}{\omega}\mathscr{L}(\sin(\omega t))(s)\,.$$

Damit ist die durch

$$u(t) = \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t) = \sqrt{\frac{m}{\kappa}}\,v_0\,\sin\Big(\sqrt{\frac{\kappa}{m}}\,t\Big), \qquad t \geqslant 0,$$

gegebene Funktion u Kandidat für eine Lösung des obigen Problems und -wie man leicht verifiziert- tatsächlich eine Lösung. *Bemerkung:* Die Lösung ist eindeutig bestimmt ($\rightarrow$ HM III).

Aufgabe 6

Sei $f \in \mathfrak{Z}$. Da f auf $(-\infty, 0)$ verschwindet, folgt $g(t) = 0$ für alle $t \in (-\infty, 0)$. Ferner ist g nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung stetig und stückweise glatt ($g'(t) = f(t)$ in allen Stetigkeitsstellen t von f). Da f höchstens von exponentiellem Wachstum ist, gibt es Konstanten $M > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $|f(t)| \leqslant Me^{\sigma t}$ für alle $t \geqslant 0$. Deshalb gilt für jedes $t \geqslant 0$

$$|g(t)| \leqslant \int_0^t |f(u)|\,du \leqslant M \int_0^t e^{\sigma u}\,du = \begin{cases} \frac{M}{\sigma}\,(e^{\sigma t} - 1) \leqslant \frac{M}{\sigma}\,e^{\sigma t} & \text{für } \sigma > 0, \\ Mt & \text{für } \sigma = 0, \\ \frac{M}{-\sigma}\,(1 - e^{\sigma t}) \leqslant \frac{M}{|\sigma|} & \text{für } \sigma < 0. \end{cases}$$

Also ist g höchstens von exponentiellem Wachstum. Fazit: $g \in \mathfrak{Z}$.