Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
Dipl.-Math. M. Uhl

Sommersemester 2011

Höhere Mathematik II für die Fachrichtungen Elektroingenieurwesen und Physik inklusive Komplexe Analysis und Integraltransformationen

Lösungsvorschläge zum 14. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Den Graphen von f bzw. g entnehmen wir

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(t) = \begin{cases} 2 & \text{für } t \in [0,2] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Die Faltung von f und g ist nach Definition gegeben durch

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$

Offenbar ist $(f*g)(t) = 0$ für $t < 0$. Zur Berechnung von $(f*g)(t)$ für $t \geqslant 0$ unterscheiden wir folgende Fälle:

1. Fall: Für $t \in [0,2)$ ergibt sich mit der Substitution $r := t - \tau$, $dr = -d\tau$

$$(f*g)(t) = \int_0^t 1 \cdot g(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t g(r)\, dr = \int_0^t 2\, dr = 2t\,.$$

2. Fall: Für $t \in [2,4)$ ergibt sich abermals mit der Substitution $r := t - \tau$, $dr = -d\tau$

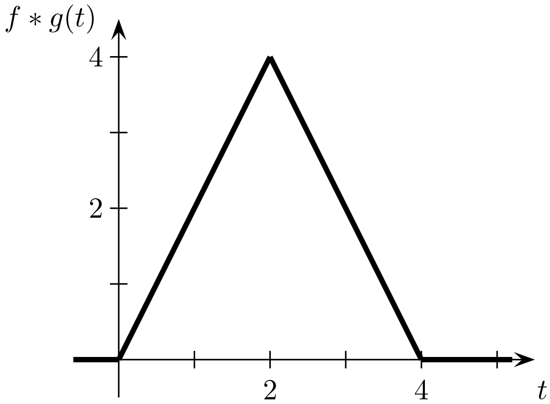
$$(f*g)(t) = \int_0^2 1 \cdot g(t-\tau)\, d\tau + \int_2^t 0 \cdot g(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-2}^t g(r)\, dr = \int_{t-2}^2 2\, dr + \int_2^t 0\, dr = 8 - 2t\,.$$

3. Fall: Für $t \geqslant 4$ ergibt sich

$$(f*g)(t) = \int_0^2 1 \cdot \underbrace{g(t-\tau)}_{=0,\ \text{da } t-\tau \geqslant 2}\, d\tau + \int_2^t 0 \cdot g(t-\tau)\, d\tau = 0\,.$$

Insgesamt haben wir

$$(f*g)(t) = \begin{cases} 2t & \text{für } t \in [0,2) \\ 8-2t & \text{für } t \in [2,4) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 4 - 2|t-2| & \text{für } t \in [0,4) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\,, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$



b) Hier sind

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [0,1] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in [3,4] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Wiederum gilt $(f * g)(t) = 0$ für $t < 0$. Um die Faltung

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau$$

für $t \geqslant 0$ zu berechnen, führen wir eine Fallunterscheidung durch:

1. Fall: Für $t \in [0,3)$ gilt

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) \underbrace{g(t-\tau)}_{=0,\text{ da } t-\tau \leqslant t < 3} d\tau = 0\,.$$

2. Fall: Für $t \in [3,4)$ ergibt sich mit der Substitution $r := t - \tau$, $dr = -d\tau$

$$(f * g)(t) = \int_0^1 1 \cdot g(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-1}^t g(r)\, dr = \int_3^t 1\, dr = t - 3\,.$$

3. Fall: Für $t \in [4,5)$ ergibt sich erneut mit der Substitution $r := t - \tau$, $dr = -d\tau$

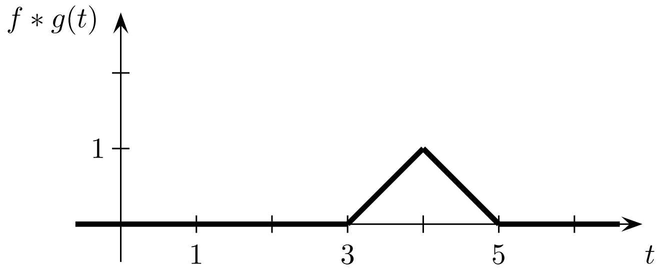
$$(f * g)(t) = \int_0^1 1 \cdot g(t-\tau)\, d\tau = \int_{t-1}^t g(r)\, dr = \int_{t-1}^4 1\, dr = 5 - t\,.$$

4. Fall: Für $t \geqslant 5$ ergibt sich

$$(f * g)(t) = \int_0^1 1 \cdot \underbrace{g(t-\tau)}_{=0,\text{ da } t-\tau \geqslant 4} d\tau = 0\,.$$

Zusammenfassend haben wir

$$(f * g)(t) = \begin{cases} t-3 & \text{für } t \in [3,4) \\ 5-t & \text{für } t \in [4,5) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} = \begin{cases} 1 - |t-4| & \text{für } t \in [3,5) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}\,.$$



Aufgabe 2

Um eine Funktion $f \in \mathfrak{Z}$ mit

$$f(t) = t^3 + \int_0^t f(\tau) \sin(t-\tau)\, d\tau \qquad \text{für alle } t \geqslant 0$$

anzugeben, schreiben wir die rechte Seite mit Hilfe der Faltung

$$f(t) = t^3 + (f * (h\, \sin))(t)$$

und wenden die Faltungsregel 12.1 an. Für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\mathrm{Re}(s)$ gilt

$$\mathscr{L}(f)(s) = \mathscr{L}(t^3 h(t))(s) + \mathscr{L}(f * (h \sin))(s) = \mathscr{L}(t^3 h(t))(s) + \mathscr{L}(f)(s)\, \mathscr{L}(h \sin)(s)\,.$$

Hieraus folgt wegen $t^3 h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$ und $\sin(t)h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{1}{s^2+1}$ (für $\mathrm{Re}(s) > 0$)

$$\mathscr{L}(f)(s) = \frac{6}{s^4} + \mathscr{L}(f)(s)\, \frac{1}{s^2+1} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathscr{L}(f)(s)\left(1 - \frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{6}{s^4}$$

bzw. äquivalent dazu

$$\mathscr{L}(f)(s) = \frac{s^2+1}{s^2} \cdot \frac{6}{s^4} = \frac{6}{s^4} + \frac{6}{s^6}\,.$$

Schließlich erhalten wir mit $t^5 h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet \frac{5!}{s^6}$ (für $\mathrm{Re}(s) > 0$)

$$\mathscr{L}(f)(s) \bullet\!\!-\!\!\circ\, t^3 h(t) + \frac{6}{5!} t^5 h(t) = (t^3 + t^5/20)\, h(t)\,,$$

also $f(t) = (t^3 + \frac{1}{20} t^5)\, h(t)$, $t \in \mathbb{R}$. Somit löst $y(t) := t^3 + \frac{1}{20} t^5$, $t \geqslant 0$, die gegebene Gleichung.

Aufgabe 3

a) **i)** Der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung richtet sich nach den Nullstellen des Nennerpolynoms $x^3 - x^2 - 2x = x(x^2 - x - 2) = x(x+1)(x-2)$. Diese sind $0, -1, 2$. Jede dieser Nullstellen ist einfach. Demzufolge lautet der Ansatz der Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x} = \frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}\,.$$

Um die Koeffizienten A, B, C zu ermitteln, haben wir verschiedene Möglichkeiten.
1. Möglichkeit: Wir multiplizieren obige Gleichung mit dem Hauptnenner $x(x+1)(x-2)$

$$x^2 + x - 1 = A(x+1)(x-2) + Bx(x-2) + Cx(x+1)$$

und setzen die Nullstellen des Nennerpolynoms ein

$$\begin{aligned} x = 0: &\quad -1 = -2A &\Longleftrightarrow&\quad A = 1/2 \\ x = -1: &\quad -1 = 3B &\Longleftrightarrow&\quad B = -1/3 \\ x = 2: &\quad 5 = 6C &\Longleftrightarrow&\quad C = 5/6 \end{aligned}$$

2. Möglichkeit: Um A, den Koeffizienten des zur Nullstelle $\lambda = 0$ gehörenden Terms $\frac{1}{x}$, zu ermitteln, multipliziert man $\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)}$ mit $x - \lambda = x$ und bildet dann den Grenzwert $x \to \lambda$, also $x \to 0$. Formal ausgedrückt bedeutet dies

$$A = \lim_{x \to 0}\left(\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)} \cdot x\right) = \lim_{x \to 0} \frac{x^2+x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}\,.$$

Entsprechend kann man für B und C verfahren

$$B = \lim_{x \to -1}\left(\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)} \cdot (x+1)\right) = \lim_{x \to -1} \frac{x^2+x-1}{x(x-2)} = -\frac{1}{3}\,,$$
$$C = \lim_{x \to 2}\left(\frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)} \cdot (x-2)\right) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-1}{x(x+1)} = \frac{5}{6}\,.$$

Mit den Koeffizienten $A = 1/2$, $B = -1/3$ sowie $C = 5/6$ ergibt sich

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x} = \frac{x^2+x-1}{x(x+1)(x-2)} = \frac{1}{2x} - \frac{1}{3(x+1)} + \frac{5}{6(x-2)}\,.$$

ii) Wiederum müssen zunächst die Nullstellen des Nennerpolynoms bestimmt werden. Durch "scharfes Hinsehen" erkennen wir, dass -1 eine solche ist. Polynomdivision liefert $x^3+x^2-x-1=(x^2-1)(x+1)$, und wegen $(x^2-1)=(x-1)(x+1)$ ergibt sich

$$x^3+x^2-x-1=(x-1)(x+1)^2\,.$$

Damit ist 1 eine einfache Nullstelle und -1 eine doppelte Nullstelle des Nennerpolynoms. Der Ansatz für eine Partialbruchzerlegung ist daher

$$\frac{x}{x^3+x^2-x-1}=\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)}+\frac{C}{(x+1)^2}\,.$$

Nach Multiplikation mit $(x-1)(x+1)^2$ ist

$$x=A(x+1)^2+B(x+1)(x-1)+C(x-1)=A(x^2+2x+1)+B(x^2-1)+C(x-1)\,.$$

Setzen wir die Nullstellen -1 und 1 hierin ein, erhalten wir

$$\begin{array}{rrcl} x=-1: & -1=-2C & \Longleftrightarrow & C=1/2 \\ x=1: & 1=\ \ 4A & \Longleftrightarrow & A=1/4 \end{array}$$

Um B zu bestimmen, können wir einen beliebigen anderen Wert für x einsetzen. Wir wählen $x=0$, weil dann die linke Seite der Gleichung verschwindet:

$$0=A-B-C=\frac{1}{4}-B-\frac{1}{2}\quad\Longleftrightarrow\quad B=-\frac{1}{4}\,.$$

Alternativ könnten wir zur Bestimmung von A,B,C auch einen Koeffizientenvergleich durchführen, der auf ein lineares Gleichungssystem führt

$$\begin{array}{rl} x^2: & 0=\ \ A+B \\ x: & 1=2A+\qquad C \\ 1: & 0=\ \ A-B-C \end{array}$$

beziehungsweise geschrieben mit Hilfe der zugehörigen erweiterten Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \ldots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{array}\right).$$

Jedenfalls liefern beide Alternativen $A=1/4$, $B=-1/4$, $C=1/2$. Folglich ist

$$\frac{x}{x^3+x^2-x-1}=\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}=\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{1}{2(x+1)^2}\,.$$

iii) Offenbar ist 2 eine Nullstelle des Nennerpolynoms $8-x^3$. Mit Hilfe der Polynomdivision $(-x^3+8):(x-2)$ sehen wir

$$8-x^3=-(x-2)(x^2+2x+4)\,.$$

Das Polynom x^2+2x+4 hat die beiden nichtreellen Nullstellen $-1+\sqrt{3}i$ und $-1-\sqrt{3}i$. Damit lautet der Ansatz für die (komplexe) Partialbruchzerlegung

$$\frac{x}{8-x^3}=\frac{-x}{(x-2)(x-(-1+\sqrt{3}i))(x-(-1-\sqrt{3}i))}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-(-1+\sqrt{3}i)}+\frac{C}{x-(-1-\sqrt{3}i)}\,.$$

Nun müssen wir die Koeffizienten A,B,C bestimmen. Hierzu multiplizieren wir obige Gleichung mit dem Hauptnenner $(x-2)(x-(-1+\sqrt{3}i))(x-(-1-\sqrt{3}i))$ durch

$$-x=A(x-(-1+\sqrt{3}i))(x-(-1-\sqrt{3}i))+B(x-2)(x-(-1-\sqrt{3}i))+C(x-2)(x-(-1+\sqrt{3}i))\,.$$

Einsetzen der Nullstellen des Nennerpolynoms ergibt

$$\begin{aligned}
x = 2: &\qquad -2 = A(3-\sqrt{3}i)(3+\sqrt{3}i) = 12A\,,\\
x = -1+\sqrt{3}i: &\qquad 1-\sqrt{3}i = B(-3+\sqrt{3}i)(2\sqrt{3}i) = -6B(1+\sqrt{3}i)\,,\\
x = -1-\sqrt{3}i: &\qquad 1+\sqrt{3}i = C(-3-\sqrt{3}i)(-2\sqrt{3}i) = -6C(1-\sqrt{3}i)\,.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
A &= -1/6\,,\\
B &= -\frac{1}{6}\cdot\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{1+3} = \frac{1}{12}+\frac{\sqrt{3}}{12}i\,,\\
C &= -\frac{1}{6}\cdot\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i} = -\frac{1}{6}\cdot\frac{(1+\sqrt{3}i)^2}{1+3} = \frac{1}{12}-\frac{\sqrt{3}}{12}i\,.
\end{aligned}$$

Als Endergebnis für die komplexe Partialbruchzerlegung erhalten wir

$$\frac{x}{8-x^3} = -\frac{\frac{1}{6}}{x-2} + \frac{\frac{1}{12}+\frac{\sqrt{3}}{12}i}{x-(-1+\sqrt{3}i)} + \frac{\frac{1}{12}-\frac{\sqrt{3}}{12}i}{x-(-1-\sqrt{3}i)}\,.$$

b) i) Wegen $(x+1)^2(x^3+1) = (x+1)^3(x^2-x+1) = (x+1)^3(x-\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2})(x-\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2})$ sind -1 eine dreifache Nullstelle und $\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$ bzw. $\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}$ jeweils eine einfache Nullstelle des Nennerpolynoms. Deshalb lautet der Ansatz für die (komplexe) Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{(x+1)^2(x^3+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} + \frac{D}{x-\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}} + \frac{E}{x-\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}}\,.$$

Ergebnis: $A = \frac{2}{9}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = \frac{1}{3}$, $D = -\frac{1}{9}$, $E = -\frac{1}{9}$.

ii) Es gilt: $x^6-x^2 = x^2(x^4-1) = x^2(x^2-1)(x^2+1) = x^2(x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$. Also ist 0 eine doppelte Nullstelle, während die Nullstellen $1,-1,i,-i$ jeweils einfach sind. Der Ansatz für die (komplexe) Partialbruchzerlegung ist

$$\frac{1}{x^6-x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{x-i} + \frac{F}{x+i}\,.$$

Ergebnis: $A = 0$, $B = -1$, $C = \frac{1}{4}$, $D = -\frac{1}{4}$, $E = -\frac{1}{4}i$, $F = \frac{1}{4}i$.

Aufgabe 4

a) Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{s-1} - \frac{1}{s+1}\Big)\,.$$

Wegen $\frac{1}{s-1} = \mathscr{L}(h)(s-1) = \mathscr{L}(e^{1\cdot t}h(t))(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ und $\frac{1}{s+1} = \mathscr{L}(h)(s+1) = \mathscr{L}(e^{(-1)\cdot t}h(t))(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > -1$ erhalten wir für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\frac{1}{s^2-1} \;\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})h(t) = \sinh(t)h(t)\,.$$

Alternativ: Nach der Faltungsregel gilt für $\mathrm{Re}(s) > 1$

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{s-1}\,\frac{1}{s+1} = \mathscr{L}(g_1)(s)\,\mathscr{L}(g_2)(s) = \mathscr{L}(g_1 * g_2)(s)$$

wobei $g_1(t) := e^t h(t)$ und $g_2(t) := e^{-t}h(t)$ gesetzt seien. Also fanden wir mit der Faltung $g_1 * g_2$ eine Funktion mit $\mathscr{L}(g_1 * g_2)(s) = \frac{1}{s^2-1}$. Nun müssen wir nur noch $g_1 * g_2$ berechnen. Für $t < 0$ ist $(g_1 * g_2)(t) = 0$ und für $t \geqslant 0$ ist

$$\begin{aligned}
(g_1 * g_2)(t) &= \int_0^t g_1(t-u)g_2(u)\,du = \int_0^t e^{t-u}e^{-u}\,du = e^t\int_0^t e^{-2u}\,du\\
&= e^t\Big(-\frac{1}{2}e^{-2u}\Big)\Big|_{u=0}^{t} = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t}) = \sinh(t)\,.
\end{aligned}$$

b) Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{s^2+2s} = \frac{1}{s(s+2)} = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2}$$

erkennen wir für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\frac{1}{s^2+2s} = \frac{1}{2}\mathscr{L}(h)(s) - \frac{1}{2}\mathscr{L}(e^{-2t}h(t))(s) = \mathscr{L}\Big(\frac{1}{2}(1-e^{-2t})h(t)\Big)(s)\,.$$

Alternativ: Wir können den **b)**-Teil auch lösen, indem wir die Dämpfungsregel auf das Resultat des **a)**-Teils anwenden. Es gilt nämlich für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{s^2+2s} &= \frac{1}{(s+1)^2-1} \overset{\textbf{a)}}{=} \mathscr{L}\big(\sinh(t)h(t)\big)(s+1) = \mathscr{L}\big(e^{-1\cdot t}\sinh(t)h(t)\big)(s)\\ &= \mathscr{L}\Big(e^{-1\cdot t}\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})h(t)\Big)(s) = \mathscr{L}\Big(\frac{1}{2}(1-e^{-2t})h(t)\Big)(s)\,.\end{aligned}$$

c) Der Ansatz

$$\frac{s+3}{s^3+4s^2} = \frac{s+3}{s^2(s+4)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+4}$$

führt auf

$$A = \frac{1}{16}\,, \quad B = \frac{3}{4}\,, \quad C = -\frac{1}{16}\,.$$

Damit gilt für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\frac{s+3}{s^3+4s^2} = \frac{1}{16}\frac{1}{s} + \frac{3}{4}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{16}\frac{1}{s+4} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \Big(\frac{1}{16} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{16}e^{-4t}\Big)h(t)\,.$$

d) Es sei $a > 0$ fest gewählt. Der Ansatz einer (komplexen) Partialbruchzerlegung lautet

$$\frac{s+a}{s(s^2+a^2)} = \frac{s+a}{s(s-ia)(s+ia)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-ia} + \frac{C}{s+ia}$$

bzw.

$$s+a = A(s-ia)(s+ia) + Bs(s+ia) + Cs(s-ia)\,.$$

Einsetzen der Nullstellen des Nennerpolynoms liefert

$$\begin{aligned} s=0: &\qquad & a &= Aa^2 &\iff\quad & A = \tfrac{1}{a}\,,\\ s=ia: && ia+a &= -2Ba^2 &\iff\quad & B = -\tfrac{1+i}{2a}\,,\\ s=-ia: && -ia+a &= -2Ca^2 &\iff\quad & C = -\tfrac{1-i}{2a}\,.\end{aligned}$$

Demzufolge ist für $\mathrm{Re}(s) > 0$

$$\begin{aligned}\frac{s+a}{s(s^2+a^2)} &= \frac{1}{a}\frac{1}{s} - \frac{1+i}{2a}\frac{1}{s-ia} - \frac{1-i}{2a}\frac{1}{s+ia}\\ &= \frac{1}{a}\mathscr{L}(h)(s) - \frac{1+i}{2a}\mathscr{L}(e^{iat}h(t))(s) - \frac{1-i}{2a}\mathscr{L}(e^{-iat}h(t))(s)\\ &= \mathscr{L}\Big(\frac{1}{a}\,h(t) - \frac{1+i}{2a}e^{iat}h(t) - \frac{1-i}{2a}e^{-iat}h(t)\Big)(s)\\ &= \mathscr{L}\Big(\frac{1}{a}\,h(t)\big(1-\frac{1}{2}(e^{iat}+e^{-iat}) + \frac{1}{2i}(e^{iat}-e^{-iat})\big)\Big)(s)\\ &= \mathscr{L}\Big(\frac{1}{a}\,h(t)\big(1-\cos(at)+\sin(at)\big)\Big)(s)\,.\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Wir verwenden Satz 1 aus 9.1: Sei $f \in \mathfrak{Z}$ eine Funktion mit dem Wachstumskoeffizienten σ_0. Gilt $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F(s)$, dann ist F in $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \sigma_0\}$ holomorph mit $F'(s) = \int_0^\infty -te^{-st} f(t)\, dt$, d.h.

$$-tf(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, F'(s)\,.$$

Deshalb ist $f(t) = -\frac{1}{t}\,\mathscr{L}^{-1}(F')(t)$ für $t > 0$.

a) Für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > |a|$ sei $F(s) := \ln(\frac{s+a}{s-a}) = \ln(\frac{s-a+2a}{s-a}) = \ln(1 + \frac{2a}{s-a})$. Dann ist

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{1}{1+\frac{2a}{s-a}}\,\frac{-2a}{(s-a)^2} = \frac{-2a}{(s-a)^2 + 2a(s-a)} = \frac{-2a}{(s-a)(s+a)} \\ &= -\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \bullet\!\!-\!\!\circ\, (-e^{at} + e^{-at})\, h(t)\,. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für $t \neq 0$

$$f(t) = -\frac{1}{t}\,\mathscr{L}^{-1}(F')(t) = \frac{1}{t}\,(e^{at} - e^{-at})\, h(t) = \frac{2\sinh(at)}{t}\, h(t)\,.$$

b) Für $F(s) := \arctan\left(\frac{a}{s}\right)$, $s \in (0, \infty)$, ergibt sich

$$F'(s) = \frac{1}{1+(a/s)^2}\,\frac{-a}{s^2} = \frac{-a}{s^2+a^2} \bullet\!\!-\!\!\circ\, -\sin(at)\, h(t)\,.$$

Hieraus folgt $f(t) = \frac{\sin(at)}{t}\, h(t)$, $t \neq 0$.

c) Ist $F(s) := \ln(1 - \frac{a^2}{s^2}) = \ln((1 - \frac{a}{s})(1 + \frac{a}{s})) = \ln(1 - \frac{a}{s}) + \ln(1 + \frac{a}{s})$ für $s \in \mathbb{R}$ mit $s > |a|$ gesetzt, so erhält man

$$\begin{aligned} F'(s) &= \frac{a}{s^2 - as} - \frac{a}{s^2 + as} = \frac{a}{s(s-a)} - \frac{a}{s(s+a)} = -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-a} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+a} \\ &= -\frac{2}{s} + \frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a} \bullet\!\!-\!\!\circ\, (-2 + e^{at} + e^{-at})\, h(t) = (-2 + 2\cosh(at))\, h(t)\,. \end{aligned}$$

Für $f(t) := 2\,\frac{1-\cosh(at)}{t}\, h(t)$, $t \neq 0$, gilt somit $f(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, \ln(1 - \frac{a^2}{s^2})$.

Aufgabe 6

a) Aus der Vorlesung kennen wir die Identität

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(f^{(n)})(s) &= s^n \mathscr{L}(f)(s) - s^{n-1} f(0+) - s^{n-2} f'(0+) - \ldots - f^{(n-1)}(0+) \\ &\overset{(*)}{=} s^n \mathscr{L}(f)(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \end{aligned}$$

für eine n-mal stetig differenzierbare Funktion f [Insbesondere sind dann $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ rechtsseitig stetig in 0, woraus die Gleichheit in $(*)$ folgt.], die höchstens von exponentiellem Wachstum ist, und $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\operatorname{Re}(s)$. Speziell für $n = 1, 2$ haben wir

$$\mathscr{L}(f')(s) = s\,\mathscr{L}(f)(s) - f(0) \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}(f'')(s) = s^2 \mathscr{L}(f)(s) - sf(0) - f'(0)\,. \qquad (**)$$

Da die Anfangswerte $y(3)$ und $y'(3)$ vorgegeben sind, können wir obiges Resultat nicht direkt anwenden. Deshalb bestimmen wir zunächst eine Funktion u mit $u''(t) + 4u'(t) + 3u(t) = 12$, $u(0) = 7, u'(0) = 1$. Dann gewinnen wir eine Lösung y des ursprünglichen Anfangswertproblems durch Verschieben von u, indem wir $y(t) := u(t-3)$ setzen.

Für eine Lösung u des Problems $u''(t) + 4u'(t) + 3u(t) = 12$ mit den Anfangswerten $u(0) = 7$ und $u'(0) = 1$ bedeutet $(**)$

$$\mathscr{L}(u')(s) = s\,\mathscr{L}(u)(s) - 7 \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}(u'')(s) = s^2 \mathscr{L}(u)(s) - 7s - 1\,.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{12}{s} &= \mathscr{L}(12h)(s) = \mathscr{L}(u'' + 4u' + 3u)(s) = (s^2\mathscr{L}(u)(s) - 7s - 1) + 4(s\,\mathscr{L}(u)(s) - 7) + 3\,\mathscr{L}(u)(s)\\ &= (s^2 + 4s + 3)\mathscr{L}(u)(s) - 7s - 29\,,\end{aligned}$$

also

$$\mathscr{L}(u)(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 3}\left(7s + 29 + \frac{12}{s}\right) = \frac{7s^2 + 29s + 12}{s(s+1)(s+3)}\,.$$

Um eine Funktion anzugeben, deren Laplacetransformierte gleich $\frac{7s^2+29s+12}{s(s+1)(s+3)}$ ist, führen wir eine Partialbruchzerlegung durch. Hierzu machen wir den Ansatz

$$\frac{7s^2 + 29s + 12}{s(s+1)(s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+3}\,.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit s und setzen $s = 0$ ein, so folgt $A = \frac{12}{3} = 4$. Multiplikation mit $s + 1$ und Einsetzen von $s = -1$ liefert $B = \frac{-10}{-2} = 5$, und ganz analog erhält man schließlich noch $C = \frac{-12}{6} = -2$. Damit gilt

$$\mathscr{L}(u)(s) \bullet\!\!-\!\!\circ \big(4 + 5e^{-t} - 2e^{-3t}\big)h(t)\,,$$

und wir haben eine Lösung u gefunden: Es ist

$$u(t) = 4 + 5e^{-t} - 2e^{-3t}\,, \qquad t \geqslant 0.$$

Somit löst $y(t) := u(t-3) = 4 + 5e^{-t+3} - 2e^{-3t+9}$, $t \geqslant 3$, das ursprüngliche Problem.

b) Wegen $y(0) = y'(0) = 0$ erhält man hier $\mathscr{L}(y')(s) = s\,\mathscr{L}(y)(s)$ und $\mathscr{L}(y'')(s) = s^2\mathscr{L}(y)(s)$ für hinreichend große $\mathrm{Re}(s)$, und mit $y''(0) = 1$ ergibt sich

$$\mathscr{L}(y''')(s) = s^3\mathscr{L}(y)(s) - s^2y(0) - sy'(0) - y''(0) = s^3\mathscr{L}(y)(s) - 1\,.$$

Insgesamt hat man also

$$\begin{aligned}\frac{1}{s-1} &= \mathscr{L}(h)(s-1) = \mathscr{L}(e^th(t))(s) = \mathscr{L}(y''' - 3y'' + 3y' - y)(s)\\ &= (s^3\mathscr{L}(y)(s) - 1) - 3s^2\mathscr{L}(y)(s) + 3s\,\mathscr{L}(y)(s) - \mathscr{L}(y)(s)\\ &= (s^3 - 3s^2 + 3s - 1)\mathscr{L}(y)(s) - 1 = (s-1)^3\mathscr{L}(y)(s) - 1\,,\end{aligned}$$

und dies führt auf

$$\mathscr{L}(y)(s) = \frac{1}{(s-1)^3}\Big(1 + \frac{1}{s-1}\Big) = \frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s-1)^4}\,.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ gilt bekanntlich

$$\mathscr{L}(t^nh(t))(s) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0)\,,$$

und mit der Dämpfungsregel folgt

$$\frac{1}{(s-1)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\,\mathscr{L}(t^nh(t))(s-1) = \frac{1}{n!}\,\mathscr{L}(e^tt^nh(t))(s) \qquad (\mathrm{Re}(s) > 1)\,.$$

Hiermit bekommen wir

$$\mathscr{L}(y)(s) = \frac{1}{2}\,\mathscr{L}(e^tt^2h(t))(s) + \frac{1}{6}\,\mathscr{L}(e^tt^3h(t))(s) = \mathscr{L}\big(e^th(t)(t^2/2 + t^3/6)\big)(s)\,,$$

d.h. eine Lösung des Anfangswertproblems ist

$$y(t) = e^t(t^2/2 + t^3/6)\,, \qquad t \geqslant 0.$$

c) Man erhält mit $c := y'(0)$ für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\mathrm{Re}(s)$

$$\mathscr{L}(y')(s) = s\,\mathscr{L}(y)(s) - 6 \qquad \text{und} \qquad \mathscr{L}(y'')(s) = s^2\mathscr{L}(y)(s) - 6s - c\,.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{6}{(s+1)^2} &= \mathscr{L}(6te^{-t}h(t))(s) = \mathscr{L}(y'' + 2y' + y)(s)\\ &= (s^2\mathscr{L}(y)(s) - 6s - c) + 2(s\,\mathscr{L}(y)(s) - 6) + \mathscr{L}(y)(s)\\ &= (s^2 + 2s + 1)\mathscr{L}(y)(s) - 6s - c - 12\,.\end{aligned}$$

Für eine Lösung y der Differentialgleichung mit $y(0) = 6$ und $y'(0) = c$ hat man also

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(y)(s) &= \frac{1}{s^2+2s+1}\left(6s + c + 12 + \frac{6}{(s+1)^2}\right) = \frac{6(s+1)+c+6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4}\\ &= \frac{6}{s+1} + \frac{c+6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4}\,.\end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\frac{1}{(s+1)^{n+1}} = \frac{1}{n!}\mathscr{L}(t^n h(t))(s+1) = \frac{1}{n!}\mathscr{L}(e^{-t}t^n h(t))(s) \qquad (\mathrm{Re}(s) > -1, n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

schließt man

$$\mathscr{L}(y)(s) = \frac{6}{s+1} + \frac{c+6}{(s+1)^2} + \frac{6}{(s+1)^4} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; (6e^{-t} + (c+6)te^{-t} + t^3e^{-t})h(t)\,,$$

d.h. $y(t) = (6 + (c+6)t + t^3)e^{-t}$, $t \geqslant 0$. Bei dieser Funktion gilt $y(1) = (13 + c)e^{-1}$, und für $c = 0$ wird die Bedingung $y(1) = 13/e$ erfüllt. Eine Lösung des Problems ist demzufolge

$$y(t) = (6 + 6t + t^3)e^{-t}\,, \qquad t \geqslant 0.$$

Aufgabe 7

Wendet man auf die rechte und linke Seite der Gleichung $y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 3\delta(t-1) + \delta(t-2)$ die Laplacetransformation an und berücksichtigt die Werte $y(0) = 1, y'(0) = 1$, so bekommt man für $s \in \mathbb{C}$ mit hinreichend großem $\mathrm{Re}(s)$

$$\begin{aligned}&s^2Y(s) - s - 1 - 4(sY(s) - 1) + 4Y(s) = 3e^{-s} + e^{2s}\\ \iff\quad &(s^2 - 4s + 4)Y(s) = s - 3 + 3e^{-s} + e^{-2s}\\ \iff\quad &Y(s) = \frac{s-3}{(s-2)^2} + \frac{3e^{-s}}{(s-2)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s-2)^2}\,.\end{aligned}$$

Dabei sei $Y(s) := \mathscr{L}(y)(s)$ gesetzt. Nun ist

$$\frac{s-3}{(s-2)^2} = \frac{s-2}{(s-2)^2} - \frac{1}{(s-2)^2} \;\bullet\!\!-\!\!\circ\; (e^{2t} - te^{2t})h(t) = (1-t)e^{2t}h(t)\,.$$

Für $f(t) := te^{2t}h(t)$, $t \in \mathbb{R}$, gilt nach der Dämpfungsregel $\mathscr{L}(f)(s) = \mathscr{L}(th(t))(s-2) = \frac{1}{(s-2)^2}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 2$. Mit der Verschiebungsregel ergibt sich

$$\frac{e^{-s}}{(s-2)^2} = e^{-s}\mathscr{L}(f)(s) = \mathscr{L}(f(t-1))(s) \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{e^{-2s}}{(s-2)^2} = e^{-2s}\mathscr{L}(f)(s) = \mathscr{L}(f(t-2))(s)\,.$$

Daher ist

$$\frac{3e^{-s}}{(s-2)^2} + \frac{e^{-2s}}{(s-2)^2} \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; 3f(t-1) + f(t-2) = 3(t-1)e^{2(t-1)}h(t-1) + (t-2)e^{2(t-2)}h(t-2)\,.$$

Zusammen folgt

$$Y(s) \;\circ\!\!-\!\!\bullet\; (1-t)e^{2t}h(t) + 3(t-1)e^{2(t-1)}h(t-1) + (t-2)e^{2(t-2)}h(t-2)\,.$$

Nach einer Probe sieht man, dass $y(t) := (1-t)e^{2t}h(t) + 3(t-1)e^{2(t-1)}h(t-1) + (t-2)e^{2(t-2)}h(t-2)$, $t \in \mathbb{R}$, das gegebene Problem im Sinne von 14.3 der Vorlesung löst.