Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
19.04.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

1. Übungsblatt

Aufgabe 1

a) Wenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren auf die folgenden Vektoren aus $\mathbb{C}^3$ an:

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Seien $\vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y}_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$ an.

Aufgabe 2

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $(\cdot|\cdot)$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Geben Sie jeweils einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an.

a) Seien $v_1, \ldots, v_n$ beliebige Vektoren aus V. Dann sind $v_1, \ldots, v_n, 0$ linear abhängig.

b) Sind $x, y \in V$ linear unabhängig und sind $x, z \in V$ linear unabhängig, so sind auch y, z linear unabhängig.

c) Sind $x, y, z \in V$ linear abhängig, so existieren $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ mit $z = \alpha x + \beta y$.

d) Ist $x \in V$ und gilt $(x|y) = 0$ für alle $y \in V$, so folgt $x = 0$.

e) Es seien $x_1, \ldots, x_n, y \in V$. Ist $y \neq 0$ und ist y orthogonal zu jedem Vektor aus $\operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\}$, so folgt $\operatorname{lin}\{x_1, \ldots, x_n\} \neq V$.

Aufgabe 3

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Für eine Menge $M \subseteq V$ bezeichnet $M^\perp = \{v \in V : \ \forall u \in M : u \perp v\}$ den Orthogonalraum von M. Zeigen Sie:

a) $M^\perp$ ist ein Untervektorraum von V.

b) $M^\perp = (\operatorname{lin}(M))^\perp$.

c) $M^\perp \cap \operatorname{lin}(M) = \{0\}$.

Aufgabe 4

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$. Die Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{K}^m$ bezeichnen die Zeilen von A. Zeigen Sie, dass gilt $\operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_n\} \perp \operatorname{Kern} \overline{A}$.

— bitte wenden —

Aufgabe 5

Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt. Weiter seien Vektoren $w, u, u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n \in V$ sowie Skalare $\alpha_1, \ldots \alpha_m, \beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ gegeben. Zeigen Sie:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k \middle| \sum_{l=1}^{n} \beta_l v_l \right) = \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta_l} \, (u_k | v_l) \, .$$

Die Vektoren $v_1, \ldots v_n$ mögen nun eine Orthonormalbasis von V bilden. Zeigen Sie:

a) $(u|w) = \sum\limits_{k=1}^{n} (u|v_k) \, \overline{(w|v_k)}$.

b) $(u|u) = \sum\limits_{k=1}^{n} |(u|v_k)|^2$.

Aufgabe 6

Es sei $G = \{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{R} \}$. Prüfen Sie, ob G versehen mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe ist.

Wichtige Termine im Sommersemester 2012:

Übungsklausur zu HM II: Samstag, 07.07.2012, 09:00 - 11:00 Uhr.

Klausur zu HM II: Montag, 17.09.2012, 08.00-10.00 Uhr. Details zur Prüfungsanmeldung werden in Kürze bekanntgegeben.

Personen:

Dozent: Priv.-Doz. Dr. Peer Christian Kunstmann
Sprechstunde: Dienstag, 13 - 14 Uhr, Donnerstag, 13 - 14 Uhr; Zimmer 3A-16 (Allianz-Geb. 05.20)
E-Mail: peer.kunstmann@kit.edu

Übungsleiterin: Dipl.-Math. Dagmar Roth
Sprechstunde: Mittwoch, 10.30 - 12 Uhr; Zimmer 3A-11.2 (Allianz-Geb. 05.20)
E-Mail: dagmar.roth@kit.edu

Übungsblätter:

Jeden Donnerstag erscheint ein Übungsblatt mit Übungsaufgaben zur schriftlichen Bearbeitung. Die Übungsblätter sind in gedruckter Form in einem Kasten neben Zimmer 3A-02 (Allianz-Geb. 05.20) sowie als pdf-Dokument unter

`http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2phys2012s/`

verfügbar. Die Besprechung der Übungsaufgaben erfolgt in den Tutorien der folgenden Woche.

Tutorien:

Die Tutorien finden ab der zweiten Vorlesungswoche statt. Bitte beachten Sie, dass für den Besuch eines Tutoriums Ihre vorherige Anmeldung erforderlich ist. Details zur Anmeldung entnehmen Sie bitte dem Hinweisblatt, das auf der Vorlesungshomepage zu finden ist.