Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
19.04.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 1. Übungsblatt

Aufgabe 1

Erinnerung: Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren: Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $v_1, \ldots, v_m \in V$ linear unabhängig. Ziel ist es, ein Orthonomalsystem $b_1, \ldots, b_m$ zu finden, so dass $\operatorname{lin}\{v_1, \ldots, v_m\} = \operatorname{lin}\{b_1, \ldots, b_m\}$ gilt.
Setze hierzu $c_1 = v_1$, $b_1 = v_1/\|v_1\|$ und für $k = 2, \ldots, m$:

$$c_k := v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{(v_k|c_j)}{(c_j|c_j)} c_j, \quad b_k := \frac{c_k}{\|c_k\|}$$

a) Die gegebenen Vektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ sind linear unabhängig. Um das zu sehen, kann man die Vektoren in eine Matrix (zeilenweise) schreiben und bringt diese auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2i & 0 \\ 5 & 3i & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - 5Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 2Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & -2 \\ 0 & 3i & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_3 - \frac{3}{2}Z_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2i & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Führe nun das Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren durch:

$$\vec{c}_1 := \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_1 := \frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun gilt $(\vec{x}_2|\vec{c}_1) = 2 \cdot \overline{1} + 2i \cdot \overline{0} + 0 \cdot \overline{1} = 2$ und wir erhalten

$$\vec{c}_2 := \vec{x}_2 - \frac{(\vec{x}_2|\vec{c}_1)}{(\vec{c}_1|\vec{c}_1)} \vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2i \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_2 := \frac{\vec{c}_2}{\|\vec{c}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(Beachte: Es gilt $\|\vec{c}_2\| = (|1|^2 + |2i|^2 + |-1|^2)^{1/2} = \sqrt{6}$.) Für die Berechnung von $\vec{c}_3$ brauchen wir die Skalarprodukte

$$(\vec{x}_3|\vec{c}_1) = 5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{0} + 1 \cdot \overline{1} = 6\,,$$
$$(\vec{x}_3|\vec{c}_2) = 5 \cdot \overline{1} + 3i \cdot \overline{2i} + 1 \cdot \overline{(-1)} = 5 - 6i^2 - 1 = 10\,.$$

Damit ergibt sich dann

$$\vec{c}_3 := \vec{x}_3 - \sum_{j=1}^{2} \frac{(\vec{x}_3|\vec{c}_j)}{(\vec{c}_j|\vec{c}_j)} \vec{c}_j = \begin{pmatrix} 5 \\ 3i \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{10}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$\vec{b}_3 := \frac{\vec{c}_3}{\|\vec{c}_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) Wir wollen das Verfahren von Gram-Schmidt benutzen. Dazu prüfen wir zuerst die gegebenen Vektoren $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3$ auf lineare Unabhängigkeit:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + 3Z_1]{Z_2 \to Z_2 - 5Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & -6 & 4 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_3 \to Z_2 + Z_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren sind also linear abhängig, insbesondere können wir an der Zeilenstufenform ablesen, dass $\vec{y}_3$ eine Linearkombination von $\vec{y}_1$ und $\vec{y}_2$ ist (dies ist möglich, da bei den Zeilenumformungen keine Zeilen vertauscht wurden). Es gilt z.B. $\vec{y}_3 = 2\vec{y}_1 - \vec{y}_2$.
Wir können außerdem ablesen, dass $\vec{y}_1$ und $\vec{y}_2$ linear unabhängig sind. Es gilt also $\operatorname{lin}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\} = \operatorname{lin}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$.

Zur Berechnung einer Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$ führen wir nun das Verfahren von Gram-Schmidt durch. Setze

$$\vec{c}_1 := \vec{y}_1, \qquad \vec{b}_1 := \frac{\vec{y}_1}{\|\vec{y}_1\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Weiter ist $(\vec{y}_2|\vec{c}_1) = 5 - 1 + 1 - 1 = 4$ und wir erhalten

$$\vec{c}_2 := \vec{y}_1 - \frac{(\vec{y}_2|\vec{c}_1)}{(\vec{c}_1|\vec{c}_1)}\vec{c}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{4}{4}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{b}_2 := \frac{\vec{c}_2}{\|\vec{c}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{24}}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Folglich ist $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ eine Orthonormalbasis von $\operatorname{lin}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\} = \operatorname{lin}\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3\}$.

Aufgabe 2

a) Die Aussage ist wahr, denn der Nullvektor $\mathbf{0}$ lässt sich als nichttriviale Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n, \mathbf{0}$ darstellen, z.B. durch $0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_n + 1 \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Hier haben wir zur Verdeutlichung $\mathbf{0}$ für den Nullvektor in V und 0 für die Zahl Null geschrieben.

b) Die Aussage ist falsch: Wir betrachten den Vektorraum $V := \mathbb{C}^2$. Dort sind $\vec{x} := \vec{e}_1 = (1,0)$ und $\vec{y} := \vec{e}_2 = (0,1)$ linear unabhängig, und genauso $\vec{x}$ und $\vec{z} := 2\vec{e}_2 = (0,2)$. Die Vektoren $\vec{y}$ und $\vec{z}$ sind jedoch nicht linear unabhängig, denn $2\vec{y} - \vec{z} = \vec{0}$ ist eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors.

c) Die Aussage ist falsch: Wähle z.B. $V := \mathbb{R}^3$ mit $\vec{x} := \vec{e}_2 = (0,1,0)$, $y := 2\vec{e}_2 = (0,2,0)$ und $z := \vec{e}_1 = (1,0,0)$.

d) Die Aussage ist richtig: Da die Gleichung für alle $y \in V$ gilt, also insbesondere für $y = x$, haben wir $(x|x) = 0$. Nach Definition des Skalarprodukts (genauer (S3)) kann dies aber nur für $x = 0$ der Fall sein.

e) Die Aussage ist wahr: Wäre nämlich $\operatorname{lin}(x_1, \ldots, x_n) = V$, so hätten wir $(y|x) = 0$ für alle $x \in V$. Aus **d)** würde dann unmittelbar $y = 0$ folgen, im Widerspruch zur Voraussetzung $y \neq 0$.

Aufgabe 3

a) Wir verwenden den Satz in 14.4:

i) $M^\perp \neq \emptyset$, da $0 \in M^\perp$: $0 \in V$ und für alle $u \in M$ gilt: $(u|0) = 0$, d.h. $u \perp 0$.

ii) Seien nun $v_1, v_2 \in M^\perp$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt für alle $u \in M$: $(v_1 + v_2|u) \overset{(S2)}{=} (v_1|u) + (v_2|u) = 0 + 0 = 0$. Somit ist $v_1 + v_2 \in M^\perp$. Ebenso gilt für alle $u \in M$: $(\alpha v_1|u) \overset{(S2)}{=} \alpha\,(v_1|u) = \alpha \cdot 0 = 0$, also ist auch $\alpha v_1 \in M^\perp$.

b) Erinnerung: $\operatorname{lin}(M) = \left\{ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j :\ n \in \mathbb{N}_0,\ \alpha_j \in \mathbb{K},\ u_j \in M \right\}$. Zeige zuerst $M^\perp \subseteq (\operatorname{lin}(M))^\perp$: Sei $v \in M^\perp$. Dann gilt für alle $u \in M : (u,v) = 0$. Sei $n \in \mathbb{N}_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ sowie

$u_1, \dots, u_n \in M$ beliebig. Dann gilt insb. $(u_j|v) = 0$ für alle $j = 1, \dots n$ und mit Aufgabe 5 folgt

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \middle| v \right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left(u_j | v \right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot 0 = 0.$$

Also ist auch $v \in (\operatorname{lin}(M))^{\perp}$.

Nun zeige $(\operatorname{lin}(M))^{\perp} \subseteq M^{\perp}$:
Wähle $v \in (\operatorname{lin}(M))^{\perp}$ und sei $u \in M$ beliebig. Dann gilt für beliebige $n \in \mathbb{N}_0,\ \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ und $u_1, \dots u_n \in M$: $\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \middle| v \right) = 0$. Wähle nun $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ sowie $u_1 = u$ (die übrigen u_j können beliebig sein). Dann folgt:

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j u_j \middle| v \right) = (u, v),$$

und somit ist $v \in M^{\perp}$.

c) Da $0 \in M^{\perp}$ und $0 \in \operatorname{lin}(M)$ folgt sofort $0 \in M^{\perp} \cap \operatorname{lin}(M)$. Angenommen, es würde ein $v \in M^{\perp} \cap \operatorname{lin}(M)$ existieren mit $v \neq 0$. Dann wäre wegen $v \in M^{\perp}$: $(u|v) = 0$ für jedes $u \in M$, also auch für jedes $u \in \operatorname{lin}(M)$. Insbesondere gilt dann für $u = v \in \operatorname{lin}(M)$: $(v|v) = 0$ woraus wegen (S3) $v = 0$ folgt, im Widerspruch zur Voraussetzung $v \neq 0$.

Aufgabe 4

Wir schreiben: $\vec{v}_j = (v_{j1}, v_{j2}, \dots, v_{jm}) \in \mathbb{K}^m$ $(j = 1, \dots, n)$. Sei $\vec{x} \in \operatorname{Kern}(\overline{A})$, d.h. es gilt

$$\begin{pmatrix} \overline{v_{11}} & \overline{v_{12}} & \dots & \overline{v_{1m}} \\ \overline{v_{21}} & \overline{v_{22}} & \dots & \overline{v_{2m}} \\ \vdots & & & \\ \overline{v_{n1}} & \overline{v_{n2}} & \dots & \overline{v_{nm}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

In der j-ten Zeile des obigen Systems steht

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \overline{v_{ji}} x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i \overline{v_{ji}} = (\vec{x}, \vec{v}_j),$$

also $\vec{v}_j \perp \operatorname{Kern}(\overline{A})$ für alle $j = 1, \dots, n$ und somit auch $\operatorname{lin}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \perp \operatorname{Kern}(\overline{A})$.

Aufgabe 5

Wir zeigen zunächst (mit Induktion), dass für alle $v \in V$ gilt:

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k \middle| v \right) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \left(u_k | v \right).$$

Induktionsanfang $m = 1$: $(\alpha_1 u_1 | v) = \alpha_1 \left(u_1 | v \right)$ gilt wegen (S2)
Induktionsschritt: Sei $m \in \mathbb{N}$ bel. aber fest. Für dieses m gelte

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k \middle| v \right) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \left(u_k | v \right) \qquad \text{(IV)}$$

Dann folgt:

$$\left(\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k u_k \middle| v\right) = \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k + \alpha_{m+1} u_{m+1} \middle| v\right) \overset{(S2)}{=} \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k \middle| v\right) + \alpha_{m+1}\left(u_{m+1}|v\right)$$
$$\overset{(IV)}{=} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \left(u_k|v\right) + \alpha_{m+1}\left(u_{m+1}|v\right) = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \left(u_k|v\right).$$

Somit ist die Behauptung gezeit.
Mit Hilfe des eben gezeigten gilt nun (beachte, dass $\sum\limits_{l=1}^{n} \beta_l v_l \in V$ gilt)

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k \middle| \sum_{l=1}^{n} \beta_l v_l\right) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \left(u_k \middle| \sum_{l=1}^{n} \beta_l v_l\right) \overset{(S1)}{=} \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \overline{\left(\sum_{l=1}^{n} \beta_l v_l \middle| u_k\right)} = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \overline{\sum_{l=1}^{n} \beta_l \left(v_l|u_k\right)}$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta_l}\, \overline{\left(v_l|u_k\right)} \overset{(S1)}{=} \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} \alpha_k \overline{\beta_l} \left(u_k|v_l\right)$$

a) Nach der Bemerkung in 15.3. gilt $u = \sum\limits_{k=1}^{n} (u|v_k)v_k$ sowie $w = \sum\limits_{l=1}^{n} (w|v_l)v_l$. Mit dem eben gezeigten folgt also:

$$(u|w) = \left(\sum_{k=1}^{n} (u|v_k)v_k \middle| \sum_{l=1}^{n} (w|v_l)v_l\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} (u|v_k)\overline{(w|v_l)}\underbrace{(v_k, v_l)}_{=\delta_{kl}} = \sum_{k=1}^{n} (u|v_k)\overline{(w|v_k)}$$

b) Setze in **a)** $w = u$ und beachte, dass für $z \in \mathbb{C}$ gilt: $|z|^2 = z\bar{z}$.

Aufgabe 6

Für $i = 1, \ldots, 3$ seien $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$ und $A_i = \begin{pmatrix} 1 & a_i & b_i \\ 0 & 1 & c_i \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$. Wir zeigen zunächst, dass die Multiplikation von zwei Matrizen in G wieder ein Element in G ergibt:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & c_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a_2 & b_2 \\ 0 & 1 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 & b_1 + b_2 + a_1 c_2 \\ 0 & 1 & c_1 + c_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

Man kann nun leicht nachrechnen, dass (G1) gilt:

$$(A_1A_2)A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 + a_2 + a_3 & b_1 + b_2 + b_3 + a_1c_2 + a_1c_3 + a_2c_3 \\ 0 & 1 & c_1 + c_2 + c_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A_1(A_2A_3)$$

Das neutrale Element ist offensichtlich durch die Einheitsmatrix I_3 gegeben und wegen $I_3 \in G$ gilt (G2).
An der Zeilenstufenform der Matrizen in G kann man sofort die Invertierbarkeit ablesen. Wir berechnen die Inverse:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & b & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[Z_2 \to Z_2 - cZ_3]{Z_1 \to Z_1 - bZ_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{Z_1 \to Z_1 - aZ_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & ac - b \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist auch die inverse Matrix ein Element von G und somit gilt (G3).