Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
26.04.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

2. Übungsblatt

Aufgabe 7

Die 2π-periodischen Funktionen f, g und h sind gegeben durch

$$\begin{array}{lll} f(x) = \frac{1}{2}\,x^2 & (-\pi \le x < \pi), & f(x+2\pi) = f(x), \\ g(x) = 1 + x + |x| & (-\pi \le x < \pi), & g(x+2\pi) = g(x), \\ h(x) = \cos(\frac{1}{2}x) & (-\pi \le x < \pi), & h(x+2\pi) = h(x). \end{array}$$

Berechnen Sie die Fourierreihen dieser Funktionen in reeller und komplexer Form.

Aufgabe 8

Ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$ die Fourierreihe einer Funktion $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$?

Hinweis: Argumentieren Sie mit der Besselschen Ungleichung.

Aufgabe 9

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare und 2π-periodische Funktion. Zeigen Sie, dass für die Fourierkoeffizienten der Ableitung f' gilt:

$$\widehat{(f')}(k) = ik\hat{f}(k) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

b) Sei $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ eine 2π-periodische Funktion. Zeigen Sie, dass für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left| k^N \hat{f}(k) \right| < \infty.$$

Aufgabe 10

Es sei $T > 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine stetige T-periodische Funktion. Berechnen Sie für f eine zu 16.7. analoge Darstellung.

Aufgabe 11

Es sei $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| < \infty$. Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $\left(\sum\limits_{|k|\le n} c_k e_k \right)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[-\pi,\pi]$ gleichmäßig gegen eine Funktion $g \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ konvergiert und dass $\hat{g}(k) = c_k$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt.

Hinweis: Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, $(n \in \mathbb{N})$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, wenn $(\text{Re}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\text{Im}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $\text{Re}(f)$ bzw. $\text{Im}(f)$ konvergieren.

Hinweis: Ab dem 8.Mai findet die Vorlesung am Dienstag im Hertz-Hörsaal statt