Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
26.04.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 2. Übungsblatt

Aufgabe 7

Die 2π-periodische Funktion $f_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $f_1(x) := x^2$ für alle $x \in [-\pi, \pi)$. Laut Beispiel (2) in 16.4 gilt für die Fourierkoeffizienten von f_1

$$\hat{f}_1(0) = \frac{\pi^2}{3} \qquad \text{und} \qquad \hat{f}_1(k) = \frac{2(-1)^k}{k^2} \quad \text{für } k \neq 0.$$

Wegen $\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} x^2 e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2} \hat{f}_1(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, ergibt sich

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2} \hat{f}_1(0) = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{und} \qquad \hat{f}(k) = \frac{1}{2} \hat{f}_1(k) = \frac{(-1)^k}{k^2} \quad \text{für } k \neq 0.$$

Somit lautet die Fourierreihe von f in komplexer Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} = \frac{\pi^2}{6} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\, e^{ikx} \,.$$

Die Koeffizienten a_k und b_k in der reellen Darstellung der Fourierreihe

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \big)$$

kann man folgendermaßen gewinnen

$$a_k = \hat{f}(k) + \hat{f}(-k) \quad (k \in \mathbb{N}_0) \qquad \text{und} \qquad b_k = i\big(\hat{f}(k) - \hat{f}(-k)\big) \quad (k \in \mathbb{N}) \,.$$

In unserem Falle ergibt sich $b_k = 0$ $(k \in \mathbb{N})$ und $a_k = \begin{cases} \frac{\pi^2}{3} & \text{für } k = 0 \\ \frac{2(-1)^k}{k^2} & \text{für } k \neq 0 \end{cases}$ $(k \in \mathbb{N}_0)$.

Bemerkung: (1) Da f auf $\mathbb{R}$ stetig und stückweise glatt ist, stellt die Fourierreihe von f nach dem Darstellungssatz 16.7 die Funktion f in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$ dar.
(2) Aus der Linearität des Integrals folgt: Sind $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ und $f_1, f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodische Funktionen, die über $[-\pi, \pi]$ integrierbar sind, so gilt für die Fourierkoeffizienten von $\alpha f_1 + \beta f_2$

$$c_k(\alpha f_1 + \beta f_2) = \alpha c_k(f_1) + \beta c_k(f_2) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}.$$

Eine entsprechende Aussage gilt auch für die Fourierkoeffizienten der reellen Fourierreihe:

$$\begin{aligned} a_k(\alpha f_1 + \beta f_2) &= \alpha a_k(f_1) + \beta a_k(f_2) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0, \\ b_k(\alpha f_1 + \beta f_2) &= \alpha b_k(f_1) + \beta b_k(f_2) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Nun zu g: Wegen $g(x) = 1$ für $x \in [-\pi, 0)$ und $g(x) = 1 + 2x$ für $x \in [0, \pi)$ folgt für jedes $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \hat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{0} e^{-ikx}\, dx + \int_{0}^{\pi} (1 + 2x) e^{-ikx}\, dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx}\, dx + \int_{0}^{\pi} 2x e^{-ikx}\, dx \right); \end{aligned}$$

für $k = 0$ erhalten wir $\hat{g}(0) = \frac{1}{2\pi}(2\pi + \pi^2) = 1 + \frac{\pi}{2}$; sonst gilt (partielle Integration)

$$\begin{aligned}
\hat{g}(k) &= 0 + \frac{1}{\pi}\left(x \cdot \frac{e^{-ikx}}{-ik}\bigg|_{x=0}^{\pi} - \int_0^\pi \frac{e^{-ikx}}{-ik}\,dx \right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi(-1)^k}{-ik} - \frac{e^{-ikx}}{(-ik)^2}\bigg|_{x=0}^{\pi} \right) \\
&= \frac{i(-1)^k}{k} - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(-1)^k - 1}{-k^2} = \frac{i(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist die Fourierreihe von g

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) e^{ikx} = 1 + \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} \left(\frac{i(-1)^k}{k} + \frac{(-1)^k - 1}{\pi k^2} \right) e^{ikx}\,.$$

Als Koeffizienten in der reellen Form der Fourierreihe $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$ erhält man

$$a_0 = 2 + \pi, \quad a_k = \hat{g}(k) + \hat{g}(-k) = \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2} \quad \text{sowie} \quad b_k = i(\hat{g}(k) - \hat{g}(-k)) = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}.$$

Nun zur Funktion h: Wir berechnen zunächst die Koeffizienten der rellen Darstellung der Fourierreihe. Es gilt (substituiere $y = -x$):

$$\int_{-\pi}^{0} \cos(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx)\,dx = -\int_{\pi}^{0} \cos(-\tfrac{1}{2}y)\sin(-ky)\,dx = \int_{\pi}^{0} \cos(\tfrac{1}{2}y)\sin(ky)\,dy = -\int_{0}^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}y)\sin(ky)\,dy$$

und folglich

$$b_k = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx)\,dx = \int_{-\pi}^{0} \cos(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx)\,dx + \int_{0}^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx)\,dx = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ ist

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx)\,dx.$$

Zweimalige partielle Integration liefert

$$\begin{aligned}
I_k &:= \int_{-\pi}^{\pi} \cos(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx)\,dx \\
&= \left[2\sin(\tfrac{1}{2}x)\cos(kx)\right]_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2\sin(\tfrac{1}{2}x)(-k\sin(kx))\,dx \\
&= 2\big(\cos(k\pi) + \cos(-k\pi)\big) + 2k\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx)\,dx \\
&= 4(-1)^k + 2k\left(\left[-2\cos(\tfrac{1}{2}x)\sin(kx)\right]_{x=-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} -2\cos(\tfrac{1}{2}x)(k\cos(kx))\,dx \right) \\
&= 4(-1)^k - 0 + 4k^2 I_k.
\end{aligned}$$

Somit haben wir die Gleichung $I_k = 4(-1)^k + 4k^2 I_k$; dies bedeutet $I_k = 4(-1)^k/(1 - 4k^2)$. Damit kennen wir $a_k = I_k/\pi$ und es ergibt sich die Fourierreihe von h in reeller Form

$$\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4(-1)^k}{(1 - 4k^2)\pi}\cos(kx)\,.$$

Hieraus kann man die Fourierkoeffizienten $\hat{h}(k)$ berechnen (setze $b_0 := 0$)

$$\hat{h}(k) = \frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{a_k}{2} = \frac{2(-1)^k}{(1 - 4k^2)\pi} \qquad \text{und} \qquad \hat{h}(-k) = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{a_k}{2} = \frac{2(-1)^k}{(1 - 4k^2)\pi} \quad (k \in \mathbb{N}_0)$$

Daher lautet die Fourierreihe von h in komplexer Form

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{(1 - 4k^2)\pi} e^{ikx}\,.$$

Aufgabe 8

Angenommen, es existiert eine Funktion $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, deren reelle Fourierkoeffizienten gegeben sind durch $a_k = 0$ $(k \in \mathbb{N}_0)$ und $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$ $(k \in \mathbb{N})$. Nach der Besselschen Ungleichung folgt

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(k)\right|^2 \leq \|f\|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx < \infty.$$

Für die Fourierkoeffizienten gilt: $\hat{f}(0) = 0$, $\hat{f}(k) = \frac{1}{2}(a_k - ib_k) = -\frac{i}{2\sqrt{k}}$ und $\hat{f}(-k) = \frac{1}{2}(a_k + ib_k) = \frac{i}{2\sqrt{k}}$ $(k \in \mathbb{N})$, und wir erhalten

$$\infty > \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(k)\right|^2 = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=-K}^{K} \left|\hat{f}(k)\right|^2 = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \left(\left|\hat{f}(k)\right|^2 + \left|\hat{f}(-k)\right|^2\right) = \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2k},$$

d.h. die Konvergenz der harmonischen Reihe. Dies ist ein Widerspruch! Deshalb existiert keine Funktion $f \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$, welche die Fourierreihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{\sqrt{k}}$ besitzt.

Aufgabe 9

a) Für $k = 0$ gilt wegen der 2π-Periodizität von f:

$$\widehat{(f')}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = \frac{f(\pi) - f(-\pi)}{2\pi} = 0 = i \cdot 0 \cdot \hat{f}(0).$$

Für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ erhalten wir mit Hilfe von partieller Integration

$$\widehat{(f')}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\underbrace{\left[f(x)e^{-ikx}\right]_{x=-\pi}^{\pi}}_{=\,0,\text{ da } 2\pi\text{-per.}} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)ike^{-ikx}\, dx = ik\hat{f}(k).$$

b) Sei $N \in \mathbb{N}$. Wenden wir die Formel aus **a)** für die Fourierkoeffizienten von $f^{(N)}$ N-mal an (beachte, dass $f \in C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, also insbesondere $f^{(n)}$ stetig differenzierbar für jedes $n \in \mathbb{N}$), so erhalten wir:

$$\widehat{(f^{(N)})}(k) = ik\widehat{(f^{(N-1)})}(k) = (ik)^2\widehat{(f^{(N-2)})}(k) = \ldots = (ik)^N\hat{f}(k) \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Wegen $f^{(N)} \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ gilt $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{(f^{(N)})}(k)| < \infty$ $(*)$, und somit

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(k)k^N| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{(f^{(N)})}(k) < \infty.$$

Bemerkung: Insbesondere gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$: Es gibt eine Konstante $C = C(N)$ mit $|\hat{f}(k)| \leq \frac{C}{|k|^N}$ für alle $k \in \mathbb{Z}$, d.h. die Folge $(|\hat{f}(k)|)_{k\in\mathbb{Z}}$ konvergiert schneller als jede Potenz von $1/|k|$ gegen 0.

Zu $(*)$: Wir schreiben $\gamma_k := \widehat{(f^{(N)})}(k)$. Aus Satz 16.8 folgt wegen $f^{(N)} \in C_{\text{per}}([-\pi,\pi],\mathbb{C})$ die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma_k|^2$. Dies impliziert wiederum die Beschränktheit der Folge $(|\gamma_k|^2)_{k\in\mathbb{Z}}$, also auch die Beschränktheit von $(|\gamma_k|)_{k\in\mathbb{Z}}$, was gleichbedeutend zu $\sup\limits_{k\in\mathbb{Z}} |\gamma_k| < \infty$ ist.

Aufgabe 10

Nach Voraussetzung ist f T-periodisch, d.h. $f(x+T) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Definiere die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ durch $g(x) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)$ $(x \in \mathbb{R})$. g ist 2π-periodisch, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

$$g(x+2\pi) = f\left(\frac{T}{2\pi}(x+2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x + T\right) = f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = g(x).$$

Nach dem Darstellungssatz 16.7. gilt für die Funktion g:

$$g(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx} \qquad \text{wobei} \qquad c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\,dx.$$

Ziel ist es, die Funktion f anstelle von g in der obigen Darstellung zu erhalten. Wir setzen dafür die Definition der Funktion g ein und substituieren $y = \frac{T}{2\pi}x$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{2\pi}x\right)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)e^{-i\frac{2\pi}{T}ky}\,dy.$$

Substituieren wir in $f\left(\frac{T}{2\pi}x\right) = g(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ ebenfalls $y = \frac{T}{2\pi}x$ so erhalten wir schließlich die Darstellung

$$f(y) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{i\frac{2\pi}{T}ky} \qquad \text{wobei} \qquad c_k = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y)e^{-i\frac{2\pi}{T}ky}\,dy.$$

Aufgabe 11

Bemerkung: Die Aussagen in 8.8 (b) und 13.1 gelten auch für komplexe Funktionenfolgen.
Für $k \in \mathbb{Z}$ definiere $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g_k(x) = c_k e^{ikx} (= c_k e_k)$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$|g_k(x)| = \left|c_k e^{ikx}\right| = |c_k|$$

und da nach Voraussetzung $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$, folgt die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge $\left(\sum\limits_{|k|\le n} g_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Funktion g mit $g(x) := \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} g_k(x) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx},\ x \in \mathbb{R}$ (vgl. 8.8 (b)). Für die Fourierkoeffizienten von g gilt:

$$\begin{aligned}\hat{g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j e^{ijx}e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \lim_{l\to\infty}\sum_{|j|\le l} c_j e^{ijx}e^{-ikx}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\lim_{l\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{|j|\le l} c_j e^{ijx}e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\lim_{l\to\infty}\sum_{|j|\le l} c_j \int_{-\pi}^{\pi} e^{ijx}e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{j\in\mathbb{Z}} c_j 2\pi\delta_{jk} = c_k\end{aligned}$$

Da die Funktionen $c_j e_j e_{-k}$ $(j,k \in \mathbb{Z})$ stetig und somit Riemann-integrierbar auf $[-\pi,\pi]$ sind und die Funktionenfolge $\left(\sum\limits_{|j|\le l} c_j e_j e_{-k}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergiert für jedes $k \in \mathbb{N}$ (denn die Funktionenfolge $\left(\sum\limits_{|j|\le l} c_j e_j\right)_{l\in\mathbb{N}}$ ist glm. konvergent und $|e_{-k}| = 1$), dürfen wir Integration und Limesbildung vertauschen, vgl. Satz 13.1.

Zusatz

(i) Beweis von 8.8 (b) für komplexe Funktionenfolgen:
Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ Folge mit $\gamma_n \ge 0$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$. Sei weiter eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : D \to \mathbb{C}$ gegeben für die gilt:

$$|f_n(x)| \le \gamma_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ x \in D$$

Mit dem Majorantenkriterium folgt, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolut konvergent ist für jedes $x \in D$. Definiere $f : D \to \mathbb{C}$, $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ $(x \in D)$, sowie eine weitere Funktionnfolge $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$ mit $g_N : D \to \mathbb{C}$, $g_N(x) = \sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)$. Nach Konstruktion konvergiert $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen f.
Wir zeigen, dass die Konvergenz sogar gleichmäßig ist. Es gilt:

$$\operatorname{Re}(g_N) = \operatorname{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Re}(f_n), \qquad \operatorname{Im}(g_N) = \sum_{n=1}^{N} \operatorname{Im}(f_n)$$

und wegen $|\operatorname{Im}(f_n)| \le \gamma_n$, $|\operatorname{Re}(f_n)| \le \gamma_n$ sind die reellen Funktionenfolgen $(\operatorname{Re}(g_N))_{N\in\mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im}(g_N))_{N\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent (siehe 8.8 (b)). Mit dem Hinweis auf dem Übungsblatt folgt die gleichmäßige Konvergenz von $(g_N)_{N\in\mathbb{N}}$.

(ii) Beweis von 13.1 für komplexe Funktionenfolgen
Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{N})$. Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. Weiter sei f_n Riemann-integrierbar für jedes $n \in \mathbb{N}$.
Wir wollen zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Nach Vorlesung sind $\operatorname{Re}(f_n)$ und $\operatorname{Im}(f_n)$ Riemann-integrierbar und wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $(f_n)_{n\in N}$ sind die Funktionenfolgen $(\operatorname{Re}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im}(f_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig konvergent. Mit Hilfe von Satz 13.1 gilt daher

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b \operatorname{Re}(f_n(x))\,dx + i\int_a^b \operatorname{Im}(f_n(x))\,dx\right)\\ &= \int_a^b \lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}(f_n(x))\,dx + i\int_a^b \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}(f_n(x))\,dx\\ &= \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Wir dürfen also Limes und Integral vertauschen.