Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
03.05.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

3. Übungsblatt

Aufgabe 12

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Determinante von A

a) mit Hilfe der Leibnizformel.

b) durch Entwicklung nach der ersten Zeile.

c) indem ein Einheitsvektor durch Spaltenumformungen erzeugt wird und dann nach diesem entwickelt wird.

Aufgabe 13

Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Welche der folgenden Aussagen gelten?

a) Die Determinante ist eine lineare Abbildung von $\mathbb{C}^{n\times n}$ nach $\mathbb{C}$.

b) Ist A regulär, so gilt $\det(A^{-1}A^\top A^2 A^\top A^{-1}) = (\det A)^2$.

c) $\det(A+B) = \det A + \det B$.

d) $\det\big((\det A)B\big) = (\det A)^n \det B$.

Aufgabe 14

Bestimmen Sie die Determinanten folgender Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{C}$ ist C regulär?

Aufgabe 15

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei die folgende Matrix gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha-6 & 17-\alpha & 2\alpha-1 \\ -2 & \alpha+9 & \alpha+5 \\ -7-\alpha & 2\alpha+14 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie $\det A$ mit Hilfe der Sarrusschen Regel, und versuchen Sie, alle α zu bestimmen, für welche die Matrix A singulär ist.

b) Berechnen Sie $\det A$ mittels Zeilen- und Spaltenumformungen, und geben Sie nun alle α an, für welche die Matrix A invertierbar ist.

Aufgabe 16

Es seien $x, a_0, a_1, \ldots \in \mathbb{C}$ sowie die Determinante

$$D_{n+1}(x) = \det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_n \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & x \end{pmatrix} \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \ldots .$$

a) Berechnen Sie $D_1(x)$, $D_2(x)$ und $D_3(x)$.

b) Geben Sie eine Formel zur Berechnung von $D_{n+1}(x)$ an und beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

c) Berechnen Sie alle $n \in \mathbb{N}_0$, für welche die $(n+1) \times (n+1)-$Matrix

$$B_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist.

Aufgabe 17

Für $\alpha \in \mathbb{R}$ sei das reelle lineare Gleichungssystem $A_\alpha \vec{x} = \vec{b}_\alpha$ gegeben durch:

$$(\star) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} (\alpha-2)\cdot x & + & (\alpha-1)\cdot y & - & (\alpha-1)\cdot z & = & 0 \\ (6-3\alpha)\cdot x & + & (\alpha^2-1)\cdot y & + & (\alpha-1)\cdot z & = & 0 \\ (\alpha^2-\alpha-2)\cdot x & + & \alpha(\alpha-1)\cdot y & - & \alpha(\alpha-1)\cdot z & = & \alpha-1. \end{array} \right.$$

a) Berechnen Sie die Determinante der Koeffizientenmatrix A_α.

b) Lösen Sie für diejenigen α, für welche $(\star)$ eindeutig lösbar ist, obiges Gleichungssystem mittels der Cramerschen Regel.

Hinweis: Ab dem 8.Mai findet die Vorlesung am Dienstag im Hertz-Hörsaal statt