Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
10.05.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

4. Übungsblatt

Aufgabe 18

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 22 & -2 & -4 \\ 4 & 16 & -4 \\ 2 & -1 & 16 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche algebraischen und geometrischen Vielfachheiten haben die Eigenwerte? Welche Matrix ist diagonalisierbar? Ermitteln Sie, falls möglich, reguläre Matrizen S_A bzw. S_B so, dass $S_A^{-1} A S_A$ bzw. $S_B^{-1} B S_B$ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 19

Bestimmen Sie alle Parameterwerte $\alpha \in \mathbb{R}$, für welche die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar ist.

Aufgabe 20

Gegeben sei das System linearer Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} u' &= 8u - 6v, \\ v' &= 9u - 7v. \end{aligned}$$

Stellen Sie dieses mit Hilfe einer geeigneten Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ in der Form

$$\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{1}$$

dar. Begründen Sie, dass A ähnlich zu einer Diagonalmatrix D ist, und definieren Sie Funktionen $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$ so, dass (1) äquivalent zu

$$\begin{pmatrix} \widetilde{u}' \\ \widetilde{v}' \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} \widetilde{u} \\ \widetilde{v} \end{pmatrix}$$

ist. Da D Diagonalgestalt besitzt, erhält man zwei entkoppelte Gleichungen, aus denen sich $\widetilde{u}$ und $\widetilde{v}$ berechnen lassen. Bestimmen Sie damit die Lösungen des Systems (1).

Aufgabe 21

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A und geben Sie eine orthogonale Matrix P an, so dass $P^T AP$ Diagonalgestalt hat.

b) Berechnen Sie A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 22

Es seien $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

a) Ist A unitär, so haben die Eigenwerte der Matrix Betrag 1.

b) B besitzt mindestens einen reellen Eigenwert.

c) Hat A den Eigenwert λ, so ist λ^2 ein Eigenwert von A^2.