Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
17.05.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

5. Übungsblatt

Aufgabe 23

Untersuchen Sie, gegebenenfalls in Abhängigkeit von auftretenden Konstanten, ob die folgenden Matrizen positiv definit sind.

$$A_\beta = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = (b_{kl})_{k,l=1,\ldots,n}\,, \quad \text{wobei } b_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l, \\ 2, & |k-l| = 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 24

Gegeben sei die Quadrik

$$Q = \left\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 :\; 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2\sqrt{3}\,x_3 + 3 = 0\right\}.$$

a) Bestimmen Sie $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ symmetrisch, $b \in \mathbb{R}^3$ und $c \in \mathbb{R}$ mit

$$Q = \left\{x \in \mathbb{R}^3 :\; x^T A x + 2b^T x + c = 0\right\}.$$

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenräume von A.

c) Ermitteln Sie eine orthogonale Matrix V so, dass $V^T A V$ Diagonalgestalt besitzt.

d) Bestimmen Sie die Normalform von Q.

Aufgabe 25

Überprüfen Sie, ob die folgenden Mengen offen oder abgeschlossen sind:

a) $M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; 0 < x^2 + 5y^2 < 1\}$

b) $M_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; x^2 + y^2 - 2xy \geq 3 \,\wedge\, y \geq x\} \cup \{(0,0)\}$

c) $A \cup B$, $A \cap B$ wobei $A, B \in \mathbb{R}^n$ offen

Aufgabe 26

Die Funktionen f, g und h sind für $(x,y) \neq (0,0)$ durch

$$f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2}\,, \qquad g(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^4}\,, \qquad h(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

gegeben, und es sei $f(0,0) := g(0,0) := h(0,0) := 0$. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist stetig.

b) Die Funktion g ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber g ist im Nullpunkt „längs jeder Geraden stetig“, d.h. für jedes feste $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt $g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \to g(0,0)$ für $r \to 0$.

c) Die Funktion h ist in $(0,0)$ nicht stetig, aber die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} h(x,y)\right) \qquad \text{und} \qquad \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} h(x,y)\right)$$

existieren und stimmen mit $h(0,0)$ überein.

— bitte wenden —

Aufgabe 27

Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ nennen wir simultan diagonalisierbar, wenn es eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, so dass die beiden Matrizen $C^{-1}AC$ und $C^{-1}BC$ Diagonalgestalt haben. Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) Sind A, B simultan diagonalisierbar, so gilt $AB = BA$.

b) Haben alle Eigenwerte von A die algebraische Vielfachheit 1 und gilt $AB = BA$ so sind A, B simultan diagonalisierbar.