Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
17.05.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

Lösungsvorschläge zum 5. Übungsblatt

Aufgabe 23

Für die symmetrische Matrix A_β verwenden wir das Hurwitz-Kriterium. Es gilt

$$1 > 0 \qquad \text{und} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = 8 - 4 = 4 > 0\,;$$

die ersten beiden Hauptunterdeterminanten sind also positiv. Die Matrix A_β ist somit genau dann positiv definit, wenn ihre Determinante > 0 ausfällt. Wegen

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} \overset{Z_2 \to Z_2 + 2Z_1}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & \beta \\ 0 & \beta & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{Entw. n. } S_1}{=} \det\begin{pmatrix} 4 & \beta \\ \beta & 1 \end{pmatrix} = 4 - \beta^2$$

ergibt sich: A_β ist positiv definit $\iff 0 < 4 - \beta^2 \iff |\beta| < 2 \iff -2 < \beta < 2$.

Nun zur Matrix B: Für $n = 1$ ist $B = (1)$ positiv definit. Im Fall $n \geq 2$ ist

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & 1 & 2 & 0 \\ \vdots & & & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Für $\vec{x} := \vec{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$B\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad \vec{x}^T B \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 1 > 0,$$

während sich für $\vec{y} := \vec{e}_1 - \vec{e}_2 = (1, -1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$

$$B\vec{y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{sowie} \qquad \vec{y}^T B \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = -2 < 0$$

ergibt. Somit ist die Matrix B indefinit.

Aufgabe 24

a) Mit $x = (x_1, x_2, x_3)$ können wir die Quadrik-Gleichung $2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2\sqrt{3}\,x_3 + 3 = 0$ in der Form

$$x^T A x + 2b^T x + c = 0\,, \quad \text{wobei} \quad A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad c := 3\,,$$

schreiben.

b) Zur Bestimmung der Eigenwerte von A berechnen wir das charakteristische Polynom von A

$$\det(A - \lambda I_3) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \overset{\substack{Z_1 \to Z_1 + \lambda Z_2 \\ Z_3 \to Z_3 + Z_2}}{=} \det \begin{pmatrix} 0 & 1-\lambda^2 & \lambda - 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\overset{\text{Entw. nach } S_1}{=} -\det \begin{pmatrix} 1-\lambda^2 & \lambda-1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda \end{pmatrix} = -(1-\lambda)^2 \det \begin{pmatrix} 1+\lambda & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -(1-\lambda)^2(\lambda+2)$$

Die Matrix A hat also die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 1$. Wegen

$$A + 2I_3 \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_2]{Z_1 \to Z_1 - 2Z_2} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 + Z_1]{Z_2 \to Z_2 + \frac{2}{3} Z_1} \begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_2]{Z_1 \to -\frac{1}{3} Z_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gehört zum Eigenwert $\lambda_1 = -2$ der Eigenraum

$$E_A(-2) = \operatorname{lin}\{\vec{c}_1\}\,, \qquad \text{wobei} \quad \vec{c}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für $\lambda_2 = 1$ betrachten wir

$$A - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Z_3 \to Z_3 - Z_1]{Z_2 \to Z_2 + Z_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_1 \to -Z_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich der zweidimensionale Eigenraum

$$E_A(1) = \operatorname{lin}\{\vec{c}_2, \vec{c}_3\}\,, \qquad \text{wobei} \quad \vec{c}_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{c}_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

c) Eine Orthonormalbasis $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A können wir via $\vec{v}_1 := \frac{1}{\|\vec{c}_1\|}\,\vec{c}_1$, $\vec{v}_2 := \frac{1}{\|\vec{c}_2\|}\,\vec{c}_2$ und $\vec{v}_3 := \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ definieren. Dann gilt $V^T A V = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =: D$ bzw. $A = VDV^T$ für die orthogonale Matrix

$$V := (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \det V = 1.$$

d) Zur Bestimmung der Normalform betrachten wir das lineare Gleichungssystem $-A\vec{p} = \vec{b}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \sqrt{3} \end{array}\right) \xrightarrow[Z_1 \leftrightarrow Z_3]{Z_2 \to Z_3 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 & -1 & \sqrt{3} \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[Z_2 \to -Z_2]{Z_3 \to Z_3 - Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 2 & -\sqrt{3} \end{array}\right) \xrightarrow[Z_3 \to \frac{1}{2} Z_3]{Z_2 \to Z_2 - \frac{1}{2} Z_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{Z_1 \to Z_1 + Z_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{array}\right).$$

Folglich besitzt $-A\vec{p} = \vec{b}$ die eindeutige Lösung $\vec{p} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,(1, -1, -1)$. Damit sind die neuen Koordinaten $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ gegeben durch $\vec{x} = V\vec{y} + \vec{p}$, also durch

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\sqrt{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

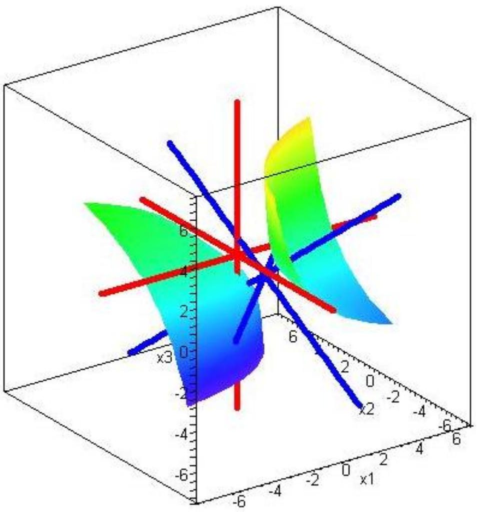
Wegen

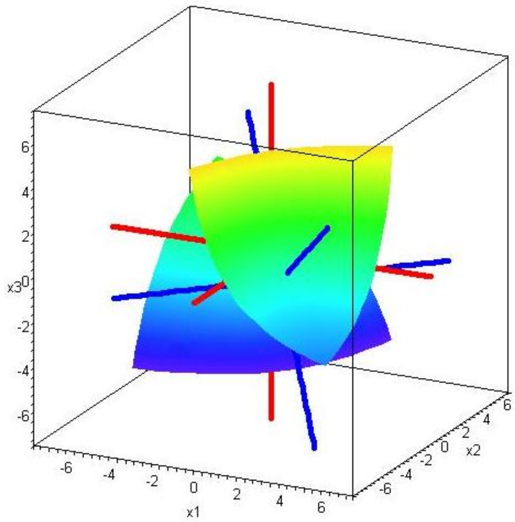
$$\vec{b}^T \vec{p} + c = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} + 3 = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$$

erhalten wir als Gleichung der Quadrik Q in den neuen Koordinaten $\vec{y}$

$$-2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + \frac{3}{2} = 0 \quad \text{bzw.} \quad -\left(\frac{y_1}{\sqrt{3/4}}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{\sqrt{3/2}}\right)^2 + \left(\frac{y_3}{\sqrt{3/2}}\right)^2 + 1 = 0.$$

Q ist ein sog. zweischaliges Hyperboloid. Die Hauptachsen sind $\vec{p} + \operatorname{lin}\{\vec{v}_1\}$, $\vec{p} + \operatorname{lin}\{\vec{v}_2\}$, $p + \operatorname{lin}\{\vec{v}_3\}$. Auf den Schaubildern ist die Quadrik nach der Hauptachsentransformation aus verschiedenen Perspektiven abgebildet. Die Hauptachsen sind dabei blau, die ursprünglichen Koordinatenachsen rot.





Aufgabe 25

a) Die Menge M_1 ist offen: Definiere die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 5y^2$. Dann ist f stetig auf $\mathbb{R}^2$ und es gilt

$$M_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < f(x, y) < 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x, y) \in (0, 1)\} = f^{-1}((0, 1)).$$

Nach dem Satz in Abschnitt 19.3 ist für stetige Funktionen das Urbild einer offenen Menge wieder offen. Da $(0, 1)$ offen folgt somit die Offenheit von M_1.

b) Die Menge M_2 ist abgeschlossen. Hierzu zeigen wir: $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^2 + y^2 - 2xy \geq 3 \wedge y \geq x\}$ ist abgeschlossen und $\{(0,0)\}$ ist abgeschlossen (das wissen wir aus der Vorlesung, da $\{(0,0)\}$ eine endliche Menge ist). M_2 ist dann als Vereinigung zweier abgeschlossener Mengen wieder abgeschlossen (das wurde in der Übung am 18.5. gezeigt).
Um die Abgeschlossenheit von A zu zeigen, benutzen wir den Satz in 19.2. Sei also $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in A$ eine konvergente Folge, d.h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_n^2 + y_n^2 - 2x_n y_n \geq 3$, $y_n > x_n$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. A ist abgeschlossen, falls $(x,y) \in A$ gilt.
Aus den Ungleichungen folgt für $n \to \infty$:

$$x^2 + y^2 - 2xy \geq 3 \qquad \text{und} \qquad y \geq x$$

(Beachte, dass die zweite Ungleichung nicht mehr strikt ist!). Wir nehmen an, dass $y = x$ gilt. Einsetzen in die erste Ungleichung liefert dann $3 \leq x^2 + x^2 - 2x^2 = 0$, einen Widerspruch. Also gilt $y > x$ und somit $(x,y) \in A$.

c) $A \cap B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \; \vec{x} \in A \wedge \vec{x} \in B\}$.
Sei $\vec{x} \in A \cap B$, d.h. $\vec{x} \in A$ und $\vec{x} \in B$. Da A und B offen, existieren $\alpha > 0$ und $\beta > 0$, so dass $K(\vec{x}, \alpha) \subseteq A$ und $K(\vec{x}, \beta) \subseteq B$. Für $\gamma := \min\{\alpha, \beta\}$ gilt dann: $K(\vec{x}, \gamma) \subseteq K(\vec{x}, \alpha)$ sowie $K(\vec{x}, \gamma) \subseteq K(\vec{x}, \beta)$. Insbesondere folgt $K(\vec{x}, \gamma) \subseteq A$ und $K(\vec{x}, \gamma) \subseteq B$, also $K(\vec{x}, \gamma) \subseteq A \cap B$. Somit ist $A \cap B$ offen.

$A \cup B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \; \vec{x} \in A \vee \vec{x} \in B\}$.
Sei $\vec{x} \in A \cup B$, d.h. es gilt $\vec{x} \in A$ oder $\vec{x} \in B$; o.B.d.A gelte $\vec{x} \in A$. Da A offen, existiert $\alpha > 0$ mit $K(\vec{x}, \alpha) \subseteq A$. Wegen $A \subseteq A \cap B$ folgt sofort $K(\vec{x}, \alpha) \subseteq A \cup B$, also ist $A \cup B$ offen.

Aufgabe 26

a) Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist die Funktion f als Komposition stetiger Funktionen stetig. Im Punkt $(0,0)$ ist f auch stetig: Mit Hilfe von $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ [Diese Ungleichung folgt aus der binomischen Formel: $0 \leq (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \Rightarrow -xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ sowie $0 \leq (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \Rightarrow xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$] ergibt sich für $(x,y) \neq (0,0)$

$$|f(x,y)| = \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \; |y| \leq \tfrac{1}{2} \; |y| \to 0 \qquad \text{für } (x,y) \to (0,0),$$

also gilt $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$, d.h. f ist stetig in $(0,0)$.

b) Die Funktion g ist nicht stetig in $(0,0)$, denn es gilt

$$g(1/n^2, 1/n) = \frac{1/n^4}{1/n^4 + 1/n^4} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2} \neq 0 = g(0,0)\,.$$

Sei nun $\varphi \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Im Fall $\cos\varphi = 0$ ist $g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = 0 \to 0 = g(0,0)$ für $r \to 0$. Im Fall $\cos\varphi \neq 0$ ergibt sich

$$g(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \frac{r^3 \cos\varphi \sin^2\varphi}{r^2\cos^2\varphi + r^4 \sin^4\varphi} = \frac{r\cos\varphi\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi + r^2\sin^4\varphi} \xrightarrow{r\to 0} \frac{0}{\cos^2\varphi + 0} = 0 = g(0,0)\,.$$

c) Wegen $h(x,x) = 1 \to 1 \neq 0 = h(0,0)$ für $x \to 0$ ist die Funktion h in $(0,0)$ nicht stetig.
Sei $x \neq 0$. Dann gilt

$$h(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2} = \frac{y^2}{y^2 + (1 - y/x)^2} \xrightarrow{y\to 0} \frac{0}{0+1} = 0\,.$$

Folglich existiert $\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0} h(x,y)) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 = h(0,0)$. Wegen $h(x,y) = h(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ existiert auch der andere iterierte Limes und hat den gleichen Wert.

Aufgabe 27

Für eine Diagonalmatrix $D = (d_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ schreiben wir $D = \operatorname{diag}(d_{11}, \ldots d_{nn})$.
Wir zeigen zunächst: Sind D, E zwei Diagonalmatrizen, so gilt $DE = ED$, denn

$$\begin{aligned} DE &= \operatorname{diag}(d_{11}, \ldots, d_{nn}) \cdot \operatorname{diag}(e_{11}, \ldots, e_{nn}) = \operatorname{diag}(d_{11}e_{11}, \ldots, d_{nn}e_{nn}) \\ &= \operatorname{diag}(e_{11}d_{11}, \ldots, e_{nn}d_{nn}) = \operatorname{diag}(e_{11}, \ldots, e_{nn}) \cdot \operatorname{diag}(d_{11}, \ldots, d_{nn}) = ED. \end{aligned}$$

a) Nach Voraussetzung existieren eine reguläre Matrix $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sowie zwei Diagonalmatrizen $D, E \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $C^{-1}AC = D$, $C^{-1}BC = E$. Multiplikation mit C^{-1} bzw. C liefert $A = CDC^{-1}$ und $B = CEC^{-1}$. Nun folgt

$$AB = CDC^{-1}CEC^{-1} = CDEC^{-1} \overset{\text{s.o.}}{=} CEDC^{-1} = CEC^{-1}CDC^{-1} = BA.$$

b) Da alle Eigenwerte von A algebraische Vielfachhheit 1 besitzen, ist auch die geometrische Vielfachhheit jedes Eigenwerts gleich 1. Insbesondere stimmen algebraische und geometrische Vielfachheit für jeden Eingenwert überein und die Matrix A ist diagonalisierbar. Wir wissen außerdem: Die Matrix A besitzt n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und die Eigenräume $E_A(\lambda_j)$ sind eindimensional, d.h. $E_A(\lambda_j) = \operatorname{lin}\{\vec{v}_j\}$, wobei $\vec{v}_j \in \mathbb{C}^n$ Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda_j \in \mathbb{C}$ ist $(j = 1, \ldots, n)$.
Für die Matrix $C = (\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt: $C^{-1}AC = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ definiere $\vec{b}_j := B\vec{v}_j$. Dann gilt:

$$A\vec{b}_j = AB\vec{v}_j \overset{AB=BA}{=} BA\vec{v}_j = B\lambda_j\vec{v}_j = \lambda_j B\vec{v}_j = \lambda_j\vec{b}_j.$$

Also ist $\vec{b}_j$ Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_j. Wegen $E_A(\lambda_j) = \operatorname{lin}\{\vec{v}_j\}$ folgt: Es existiert $\mu_j \in \mathbb{C}$ mit $\vec{b}_j = \mu_j\vec{v}_j$, und wegen $\vec{b}_j = B\vec{v}_j$ erhalten wir, dass $\vec{v}_j$ Eigenvektor der Matrix B zum Eigenwert μ_j ist. Somit ist auch B diagonalisierbar und $C^{-1}BC = \operatorname{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_n)$.