Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
24.05.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik
6. Übungsblatt

Aufgabe 28

Die Kurve $\vec{r}\colon (-1,1) \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \arcsin t \\ t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \qquad (t \in (-1,1)).$$

Ist $\vec{r}$ eine reguläre Kurve? Berechnen Sie die Länge der Kurve $\vec{r}$ und bestimmen Sie die Darstellung von $\vec{r}$ bezüglich der Bogenlänge.

Aufgabe 29

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = \big(xy^2z^3e^{xy^2z^3},\ x^2e^y + \sin x\big)$

b) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = \big(ye^x + x\sinh y,\ y^4 + 3x^2\sin y,\ 4y - x^3\big)$

c) $f\colon (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3,\ f(r,\varphi,\theta) = \big(r\cos\varphi\,\cos\theta,\ r\sin\varphi\,\cos\theta,\ r\sin\theta\big)$

d) $f\colon \mathbb{R} \times (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(w,x,y,z) = x^y$

Aufgabe 30

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^2$ stetig ist.

b) Berechnen Sie in jedem Punkt die partiellen Ableitungen von f.

c) Sind die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0,0)$ stetig?

d) Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)$ für jede Richtung $\vec{v}$, für die das möglich ist. Für welche $\vec{v}$ gilt $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = (\nabla f(0,0)) \cdot \vec{v}$?

e) Untersuchen Sie, in welchen Punkten f differenzierbar ist. Berechnen Sie dort f'.

Aufgabe 31

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\,\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{für } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$

a) Zeigen Sie, dass diese Funktion im Punkt $(0,0)$ differenzierbar ist.

b) Rechnen Sie nach, dass die partiellen Ableitungen f_x und f_y in $(0,0)$ nicht stetig sind.

— bitte wenden —

Aufgabe 32

Die Funktionen $f, g, h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sind definiert durch

$$f(x,y) = \bigl(x^2,\, y^2\bigr)\,, \qquad g(x,y) = \bigl(\sin(xy),\, e^{x+y}\bigr)\,, \qquad h(x,y) = \bigl(e^x \cos y,\, \sinh x\bigr)\,.$$

Berechnen Sie die Ableitungen von f, g und h, und ermitteln Sie dann mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen der Funktionen $g \circ f$ und $h \circ g$. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie $g \circ f$ und $h \circ g$ explizit angeben und ableiten.