Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
24.05.2012

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik**

**Lösungsvorschläge zum 6. Übungsblatt**

### Aufgabe 28

Für alle $t \in (-1,1)$ gilt

$$\vec{r}\,'(t) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{1-t^2} \\ 1 \\ -t/\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \neq \vec{0}.$$

Also ist $\vec{r}$ eine reguläre Kurve.

Für $t \in (-1,1)$ haben wir

$$g(t) := \int_{-1}^{t} \|\vec{r}\,'(\tau)\|\,d\tau = \int_{-1}^{t} \sqrt{\frac{2}{1-\tau^2}}\,d\tau = \sqrt{2}\arcsin\tau\Big|_{\tau=-1}^{t} = \sqrt{2}\,(\arcsin t + \tfrac{\pi}{2})\,.$$

Folglich hat die Kurve $\vec{r}$ die Länge $L(\vec{r}\,) = g(1) = \sqrt{2}\,\pi$. Wegen

$$g(t) = s \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\pi}{2} = \arcsin t \qquad \Longleftrightarrow \qquad t = \sin(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \tfrac{\pi}{2})$$

ist $g^{-1}\colon [0,\sqrt{2}\,\pi] \to [-1,1]$, $s \mapsto g^{-1}(s) = \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{2}) = -\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s)$. Damit lautet die Parametrisierung von $\vec{r}$ bezüglich der Bogenlänge (oder auch natürliche Darstellung von $\vec{r}$)

$$\vec{\varrho}(s) = \vec{r}\,(g^{-1}(s)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}\,s - \frac{\pi}{2} \\ -\cos(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s) \\ \sin(\frac{1}{2}\sqrt{2}\,s) \end{pmatrix}, \qquad s \in [0,\sqrt{2}\,\pi]\,.$$

### Aufgabe 29

**a)** Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y,z) = \big(xy^2z^3e^{xy^2z^3},\, x^2e^y + \sin x\big) =: (f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$.

Wir berechnen zunächst die partiellen Ableitungen von $f$:

$$\begin{aligned}
(f_1)_x(x,y,z) &= y^2z^3e^{xy^2z^3} + xy^2z^3e^{xy^2z^3}y^2z^3 = y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
(f_1)_y(x,y,z) &= 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
(f_1)_z(x,y,z) &= 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3},\\
(f_2)_x(x,y,z) &= 2xe^y + \cos x,\\
(f_2)_y(x,y,z) &= x^2e^y,\\
(f_2)_z(x,y,z) &= 0
\end{aligned}$$

Da die partiellen Ableitungen auf $\mathbb{R}^3$ stetig sind, ist $f$ stetig partiell differenzierbar und damit auch differenzierbar. Für die Ableitung von $f$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
f'(x,y,z) &= \begin{pmatrix} (f_1)_x(x,y,z) & (f_1)_y(x,y,z) & (f_1)_z(x,y,z) \\ (f_2)_x(x,y,z) & (f_2)_y(x,y,z) & (f_2)_z(x,y,z) \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} y^2z^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 2xyz^3(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} & 3xy^2z^2(1+xy^2z^3)e^{xy^2z^3} \\ 2xe^y + \cos x & x^2e^y & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

**b)** $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ f(x,y) = \big(ye^x + x\sinh y,\ y^4 + 3x^2\sin y,\ 4y - x^3\big)$

Auch hier sind alle partiellen Ableitungen von $f$ stetig, so dass $f$ differenzierbar ist mit

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} ye^x + \sinh y & e^x + x\cosh y \\ 6x\sin y & 4y^3 + 3x^2\cos y \\ -3x^2 & 4 \end{pmatrix}, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

**c)** $f\colon (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^3,\ f(r,\varphi,\theta) = \big(r\,\cos\varphi\,\cos\theta,\ r\,\sin\varphi\,\cos\theta,\ r\sin\theta\big)$

Wiederum ist $f$ stetig partiell differenzierbar und damit differenzierbar. Die Ableitung von $f$ lautet

$$f'(r,\varphi,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\theta & -r\,\sin\varphi\,\cos\theta & -r\cos\varphi\,\sin\theta \\ \sin\varphi\,\cos\theta & r\,\cos\varphi\,\cos\theta & -r\sin\varphi\,\sin\theta \\ \sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$(r,\varphi,\theta) \in (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \times (-\pi/2,\pi/2).$$

*Bemerkung:* Es gilt $\det f'(r,\varphi,\theta) = r^2\cos\theta$ ($\to$ Kugelkoordinaten).

**d)** $f\colon \mathbb{R} \times (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(w,x,y,z) = x^y$

Wegen $x^y = e^{y\ln x}$ gilt $f_x(w,x,y,z) = e^{y\ln x}y/x$ und $f_y(w,x,y,z) = e^{y\ln x}\ln x$. Folglich ist

$$f'(w,x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & yx^{y-1} & x^y\ln x & 0 \end{pmatrix}, \quad (w,x,y,z) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) \times \mathbb{R}^2.$$

## Aufgabe 30

**a)** Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ist $f$ als Komposition stetiger Funktionen stetig. Stetigkeit von $f$ in $(0,0)$: Sei $(x_k,y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ mit $(x_k,y_k) \to (0,0)$. Dann gilt auch $m_k := \max\{|x_k|,|y_k|\} \xrightarrow{k\to\infty} 0$, und dies liefert dann

$$|f(x_k,y_k)| \le \frac{|y_k^3| + |x_k^2 y_k|}{x_k^2 + y_k^2} \le \frac{m_k^3 + m_k^3}{m_k^2} = 2m_k \xrightarrow{k\to\infty} 0\,.$$

Das bedeutet $f(x_k,y_k) \to 0 = f(0,0)$, womit die Stetigkeit von $f$ auf ganz $\mathbb{R}^2$ bewiesen ist.

**b)** Für $(x,y) \neq (0,0)$ erhalten wir mit Hilfe der Quotientenregel

$$f_x(x,y) = \frac{-2xy(x^2+y^2) - (y^3 - x^2y)2x}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{4xy^3}{(x^2+y^2)^2}$$

und

$$f_y(x,y) = \frac{(3y^2 - x^2)(x^2+y^2) - (y^3 - x^2y)2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{4x^2y^2 - x^4 + y^4}{(x^2+y^2)^2}\,.$$

Im Punkt $(0,0)$ dagegen müssen wir auf die Definition der partiellen Ableitung zurückgehen:

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t} = 0$$

und

$$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^3 - 0}{0 + t^2} = \lim_{t\to 0} 1 = 1\,.$$

**c)** Wegen

$$f_x(\tfrac{1}{k},\tfrac{1}{k}) = -\frac{4k^{-4}}{(k^{-2}+k^{-2})^2} = -1 \xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 0 = f_x(0,0)$$

und

$$f_y(\tfrac{1}{k},0) = \frac{0 - k^{-4} + 0}{(k^{-2}+0)^2} = -1 \xrightarrow{k\to\infty} -1 \neq 1 = f_y(0,0)$$

sind die partiellen Ableitungen von $f$ in $(0,0)$ nicht stetig.

**d)** Es sei $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ eine beliebige Richtung. Dann gilt

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h\vec{v}) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(hv_1, hv_2)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{(hv_2)^3 - (hv_1)^2 hv_2}{(hv_1)^2 + (hv_2)^2} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 v_2^3 - h^3 v_1^2 v_2}{h^3(v_1^2 + v_2^2)} = \lim_{h\to 0} \frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}\,.$$

Dies soll nun mit

$$(\nabla f(0,0)) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_2$$

verglichen werden. Es gilt

$$\frac{v_2^3 - v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2} = v_2 \iff v_2^3 - v_1^2 v_2 = v_2(v_1^2 + v_2^2) \iff 2v_1^2 v_2 = 0\,.$$

Gleichheit gilt also genau dann, wenn $v_1 = 0$ oder $v_2 = 0$ ist.

**e)** Nicht für alle Richtungen $\vec{v}$ gilt die Gleichung $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = (\nabla f(0,0)) \cdot \vec{v}$. Folglich kann die Funktion $f$ in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein, denn sonst müsste diese Gleichung für alle Richtungen $\vec{v}$ gelten.

Da die partiellen Ableitungen von $f$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig sind, ist $f$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ stetig partiell differenzierbar, also auch differenzierbar und für $(x,y) \neq (0,0)$ gilt

$$f'(x,y) = \big(\nabla f(x,y)\big)^T = \frac{1}{(x^2+y^2)^2} \begin{pmatrix} -4xy^3 & -x^4 + 4x^2y^2 + y^4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

**Aufgabe 31**

**a)** Für die partiellen Ableitungen von $f$ im Punkt $(0,0)$ gilt

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2 \sin(|t|^{-1}) - 0}{t} = \lim_{t\to 0} t \sin(|t|^{-1}) = 0,$$

weil $\sin(|t|^{-1})$ beschränkt ist, und aufgrund von $f(x,y) = f(y,x)$ ist $f_y(0,0) = f_x(0,0) = 0$.

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in $(0,0)$, wenn es eine lineare Abbildung $A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, also $A \in \mathbb{R}^{1\times 2}$, gibt mit

$$\frac{\left| f(h_1,h_2) - f(0,0) - A\binom{h_1}{h_2} \right|}{\|\binom{h_1}{h_2}\|} \xrightarrow{\binom{h_1}{h_2}\to\binom{0}{0}} 0\,. \qquad (*)$$

Wegen $f_x(0,0) = 0$ und $f_y(0,0) = 0$ ist $A = (0\ \ 0)$ unser Kandidat für die Ableitung von $f$ in $(0,0)$. In der Tat ist $(*)$ für dieses $A$ erfüllt, denn es gilt $f(0,0) = 0$ und $A\binom{h_1}{h_2} = 0$ sowie

$$\frac{|f(h_1,h_2)|}{\|\binom{h_1}{h_2}\|} = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}\, \sin \frac{1}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \|\tbinom{h_1}{h_2}\| \sin \frac{1}{\|\binom{h_1}{h_2}\|} \xrightarrow{\binom{h_1}{h_2}\to\binom{0}{0}} 0\,.$$

**b)** Für die partielle Ableitung von $f$ nach $x$ ergibt sich im Fall $(x,y) \neq (0,0)$

$$f_x(x,y) = 2x \sin\Big((x^2+y^2)^{-1/2}\Big) + (x^2+y^2) \cos\Big((x^2+y^2)^{-1/2}\Big) \cdot (-\tfrac{1}{2})(x^2+y^2)^{-3/2} \cdot 2x$$
$$= 2x \sin\Big((x^2+y^2)^{-1/2}\Big) - x(x^2+y^2)^{-1/2} \cos\Big((x^2+y^2)^{-1/2}\Big)\,.$$

Damit hat man für $x \neq 0$

$$f_x(x,0) = 2x \sin(|x|^{-1}) - x\,|x|^{-1} \cos(|x|^{-1})\,.$$

Ist $x_k := \frac{1}{k\pi}$, $k \in \mathbb{N}$, gesetzt, so strebt $x_k \to 0$ für $k \to \infty$, allerdings konvergiert $f_x(x_k, 0) = 2\frac{1}{k\pi}\sin(k\pi) - \cos(k\pi) = -(-1)^k$ für $k \to \infty$ nicht. Folglich ist $f_x$ in $(0,0)$ nicht stetig. Aus Symmetriegründen ($f(x,y) = f(y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) gilt dies auch für $f_y$.

*Bemerkung:* Die Funktion $f$ ist ein Beispiel für eine Funktion, die differenzierbar ist, jedoch nicht stetig partiell differenzierbar ist. Wenn man also weiß, dass eine Funktion nicht stetig partiell differenzierbar ist, dann kann man keine Aussage über Differenzierbarkeit treffen.

**Aufgabe 32**

Offensichtlich besitzen alle drei Funktionen stetige partielle Ableitungen und sind damit differenzierbar.
Für $f$ mit den Komponentenfunktionen $f_1(x,y) := x^2$ und $f_2(x,y) := y^2$ gilt

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} (f_1)_x & (f_1)_y \\ (f_2)_x & (f_2)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix},$$

und ebenso ergibt sich

$$g'(x,y) = \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad h'(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ \cosh x & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Hilfe der Kettenregel kommen wir dann auf

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(x,y) = g'\big(f(x,y)\big) \cdot f'(x,y) &= \begin{pmatrix} y^2\cos(x^2y^2) & x^2\cos(x^2y^2) \\ e^{x^2+y^2} & e^{x^2+y^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Für die Funktion $h \circ g$ erhält man

$$\begin{aligned}(h \circ g)'(x,y) &= h'\big(g(x,y)\big) \cdot g'(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}) & -e^{\sin(xy)}\sin(e^{x+y}) \\ \cosh(\sin(xy)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y\cos(xy) & x\cos(xy) \\ e^{x+y} & e^{x+y} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

und Ausmultiplizieren liefert für $(h \circ g)'(x,y)$ die Matrix

$$= \begin{pmatrix} \big(y\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} & \big(x\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}.$$

Wegen

$$g \circ f(x,y) = g(f(x,y)) = g(x^2,y^2) = \big(\sin(x^2y^2),\, e^{x^2+y^2}\big) =: (u_1(x,y), u_2(x,y))$$

erhalten wir

$$(g \circ f)'(x,y) = \begin{pmatrix} (u_1)_x & (u_1)_y \\ (u_2)_x & (u_2)_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy^2\cos(x^2y^2) & 2x^2y\cos(x^2y^2) \\ 2xe^{x^2+y^2} & 2ye^{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist

$$h \circ g(x,y) = h(g(x,y)) = h\big(\sin(xy),\, e^{x+y}\big) = \big(e^{\sin(xy)}\cos(e^{x+y}), \sinh(\sin(xy))\big) =: (v_1(x,y), v_2(x,y))$$

und für die Ableitung ergibt sich

$$(h \circ g)'(x,y) = \begin{pmatrix} (v_1)_x & (v_1)_y \\ (v_2)_x & (v_2)_y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \big(y\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} & \big(x\cos(xy)\cos(e^{x+y}) - e^{x+y}\sin(e^{x+y})\big)e^{\sin(xy)} \\ y\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) & x\cos(xy)\cosh(\sin(xy)) \end{pmatrix}.$$