Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
31.05.2012

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik**

**7. Übungsblatt**

### Aufgabe 33

Die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \cosh x \, \cos y \\ \sinh x \, \sin y \end{pmatrix}.$$

**a)** Zeigen Sie: Es gibt eine Umgebung $U$ von $(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ und eine Umgebung $V$ von $(0, \frac{3}{4})$ so, dass $U$ durch die Funktion $f$ bijektiv auf $V$ abgebildet wird. Berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion in $(0, \frac{3}{4})$.

**b)** Zeigen Sie, dass die Funktion $f$ in jedem Punkt $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ lokal invertierbar ist, aber dass $f$ nicht injektiv ist.

**c)** Berechnen Sie $f(G)$ für den Streifen

$$G := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 < y < \tfrac{\pi}{2}\right\}$$

### Aufgabe 34

**a)** Zeigen Sie, dass die Gleichung $z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3 = 0$ in einer Umgebung von $(0,0,-2)$ nach $z$ aufgelöst werden kann. Berechnen Sie für die dadurch implizit definierte Funktion $g(x,y)$ die Ableitung $g'(x,y)$.

**b)** Betrachten Sie die beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0 \qquad \text{und} \qquad x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1.$$

Zeigen Sie: Durch diese Gleichungen werden in einer Umgebung des Punktes $(0,0)$ zwei $C^1$-Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ mit $u(0,0) = v(0,0) = 1$ implizit definiert.

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung dieser Funktionen in $(0,0)$.

### Aufgabe 35

**a)** Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = xe^z - y^2$, um den Entwicklungspunkt $(x_0,y_0,z_0) = (1,-1,0)$.

**b)** Berechnen Sie das Taylorpolynom dritten Grades der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \cos(x)\,\sin(y)\,e^{x-y}$, um den Entwicklungspunkt $(x_0,y_0) = (0,0)$.

**c)** Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f : (0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^y$ um den Entwicklungspunkt $(x_0,y_0) = (1,3)$.
Berechnen Sie eine Näherung von $1.02^{3.01}$.

— bitte wenden —

**Aufgabe 36**

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sei stetig differenzierbar und $f'(\vec{x})$ sei für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ invertierbar. Zeigen Sie, dass gilt:

**a)** Das Bild $f(G)$ jeder offenen Teilmenge $G \subseteq D$ ist offen.

**b)** Die auf $D$ definierte Funktion $\vec{x} \mapsto \|f(\vec{x})\|$ besitzt kein Maximum. Kann die Funktion ein Minimum besitzen?

*Hinweis:* Sie können z.B. die Ableitung von $\vec{x} \mapsto \|f(\vec{x})\|^2$ berechnen.

Die **Prüfung** zur HM II findet am Montag, den 17.09.2012, statt.
Zur Teilnahme ist eine Anmeldung erforderlich. **Anmeldeschluss: Freitag, der 20.07.2012.**
Weitere Informationen zur Prüfung entnehmen Sie bitte der Vorlesungshomepage

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/hm2phys2012s/.