Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
31.05.2012

**Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik**

**Lösungsvorschläge zum 7. Übungsblatt**

## Aufgabe 33

**a)** Der Umkehrsatz liefert die Behauptung, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind: Die Funktion $f$ ist stetig differenzierbar, es gilt $f(\ln 2, \frac{\pi}{2}) = (0, \frac{3}{4})$ und die Matrix $f'(\ln 2, \frac{\pi}{2})$ ist regulär. Wir überprüfen diese Voraussetzungen: Die stetige Differenzierbarkeit ist offensichtlich. Weiter ist

$$f(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} \cosh(\ln 2)\,\cos\frac{\pi}{2} \\ \sinh(\ln 2)\,\sin\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sinh(\ln 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3/4 \end{pmatrix},$$

denn $\sinh(\ln 2) = \frac{1}{2}(e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}) = \frac{1}{2}(2 - \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Schließlich gilt

$$f'(x,y) = \begin{pmatrix} \sinh x\,\cos y & -\cosh x\,\sin y \\ \cosh x\,\sin y & \sinh x\,\cos y \end{pmatrix},$$

und damit ist

$$f'(\ln 2, \tfrac{\pi}{2}) = \begin{pmatrix} 0 & -\cosh(\ln 2) \\ \cosh(\ln 2) & 0 \end{pmatrix}$$

regulär, denn $\cosh(\ln 2) = \frac{1}{2}(2 + \frac{1}{2}) = \frac{5}{4} \neq 0$.

Nach dem Umkehrsatz gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(0, \tfrac{3}{4}) = \left(f'(f^{-1}(0, \tfrac{3}{4}))\right)^{-1} = \left(f'(\ln 2, \tfrac{\pi}{2})\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -5/4 \\ 5/4 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 4/5 \\ -4/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

**b)** Die Funktion $f$ ist überall stetig differenzierbar und für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist

$$\det f'(x,y) = (\sinh x\,\cos y)^2 + (\cosh x\,\sin y)^2 .$$

Diese Determinante wird also nur dann 0, wenn $\sinh x\,\cos y = 0$ und $\cosh x\,\sin y = 0$ gilt. Für $x > 0$ ist dies gleichbedeutend mit $\cos y = 0$ und $\sin y = 0$, kann also nie eintreten. Folglich ist für $x > 0$ die Matrix $f'(x,y)$ stets regulär. Der Umkehrsatz liefert nun die lokale Invertierbarkeit von $f$ in jedem Punkt $(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$.

Trotzdem ist die Funktion $f$ auf $(0,\infty) \times \mathbb{R}$ nicht injektiv wegen $f(x, y + 2\pi) = f(x,y)$ für $(x,y) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$.

**c)** Es gilt:

$$\begin{aligned} \cosh(\mathbb{R}) &= [1,\infty), \qquad & \sinh(\mathbb{R}) &= (-\infty,\infty) \\ \sin\left((0,\tfrac{\pi}{2})\right) &= (0,1), \qquad & \cos\left((0,\tfrac{\pi}{2})\right) &= (0,1) \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$f(G) = f\left(\mathbb{R} \times (0,\tfrac{\pi}{2})\right) = [0,\infty) \times (-\infty,\infty)$$

**Aufgabe 34**

**a)** Die behauptete Auflösbarkeit folgt mit dem Satz über implizit definierte Funktionen, wenn wir

$$f(0,0,-2) = 0 \qquad \text{und} \qquad f_z\,(0,0,-2) \neq 0$$

für die stetig differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) := z^3 + 2z^2 - 3xyz + x^3 - y^3$, überprüft haben. Es gilt $f(0,0,-2) = (-2)^3 + 2(-2)^2 = 0$ und

$$f_z\,(x,y,z) = 3z^2 + 4z - 3xy\,, \qquad \text{also} \qquad f_z\,(0,0,-2) = 3(-2)^2 + 4(-2) = 4 \neq 0\,,$$

womit die Behauptung bereits bewiesen ist. Für die Ableitung gilt

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= -\Big(f_z\big(x,y,g(x,y)\big)\Big)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x,y)}\big(x,y,g(x,y)\big) \\ &= -\frac{1}{3g(x,y)^2 + 4g(x,y) - 3xy}\big(-3yg(x,y) + 3x^2 \quad -3xg(x,y) - 3y^2\big)\,. \end{aligned}$$

**b)** Wir müssen zeigen, dass in der Nähe von $(0,0,1,1)$ durch die Gleichung

$$f(x,y,u,v) = \vec{0}\,, \qquad \text{mit} \quad f(x,y,u,v) := \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - u^2 + v^2 \\ x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 - 1 \end{pmatrix}$$

implizite Funktionen $u$ und $v$ definiert werden. Offenbar ist $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar; zudem sieht man sofort, dass $f(0,0,1,1) = \vec{0}$ gilt; die ersten zwei Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen sind also erfüllt. Jetzt müssen wir nur noch prüfen, ob die Matrix $\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0,1,1)$ regulär ist. Wegen

$$f'(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2u & 2v \\ 2x & 4y & -6u & 8v \end{pmatrix} \qquad \text{ist} \qquad \frac{\partial f}{\partial(u,v)}(x,y,u,v) = \begin{pmatrix} -2u & 2v \\ -6u & 8v \end{pmatrix}$$

und damit $\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0,0,1,1) = \left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{smallmatrix}\right)$. Diese Matrix ist tatsächlich regulär, denn $\det\left(\begin{smallmatrix} -2 & 2 \\ -6 & 8 \end{smallmatrix}\right) = -4 \neq 0$.

Somit sind die Voraussetzungen des Satzes über implizit definierte Funktionen erfüllt. Danach gibt es eine offene Umgebung $U \subset \mathbb{R}^2$ von $(0,0)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon U \to \mathbb{R}^2$ mit $g(0,0) = (1,1)$ und $f(x,y,g(x,y)) = \vec{0}$ für alle $(x,y) \in U$. Definiert man $u$ als die erste Komponentenfunktion von $g$ und $v$ als die zweite Komponentenfunktion von $g$, dann leisten $u,v\colon U \to \mathbb{R}$ das Gewünschte. Außerdem ergibt für sich für $(x,y) \in U$

$$\begin{aligned} g'(x,y) &= -\left(\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(x,y,g(x,y))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y,g(x,y)) \\ &= -\left(\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(x,y,u(x,y),v(x,y))\right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial(x,y)}(x,y,u(x,y),v(x,y)) \\ &= -\begin{pmatrix} -2u(x,y) & 2v(x,y) \\ -6u(x,y) & 8v(x,y) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 4y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insbesondere für $(x,y) = (0,0)$ ist der zweite Faktor die Nullmatrix, so dass dann

$$g'(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist. Dies bedeutet, dass $u_x(0,0) = u_y(0,0) = v_x(0,0) = v_y(0,0)$ gilt.

Dieses Ergebnis kann man auch folgendermaßen herleiten: Bilden wir in den beiden Gleichungen $x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0$ und $x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach $x$, wobei wir $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ jetzt als die implizit definierten Funktionen auffassen, so ergibt sich

$$2x - 2uu_x + 2vv_x = 0 \qquad \text{und} \qquad 2x - 6uu_x + 8vv_x = 0\,.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_x(0, 0) + 2v_x(0, 0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6u_x(0, 0) + 8v_x(0, 0) = 0\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_x(0, 0) = v_x(0, 0) = 0$.

Um die partiellen Ableitungen nach $y$ der implizit definierten Funktionen $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ zu berechnen, gehen wir analog wie eben vor. Wir bilden in beiden Gleichungen $x^2 + y^2 - u^2 + v^2 = 0$ und $x^2 + 2y^2 - 3u^2 + 4v^2 = 1$ die partielle Ableitung nach $y$ und erhalten

$$2y - 2uu_y + 2vv_y = 0 \qquad \text{und} \qquad 4y - 6uu_y + 8vv_y = 0\,.$$

Einsetzen von $x = y = 0$ liefert wegen $u(0, 0) = v(0, 0) = 1$ die Gleichungen

$$-2u_y(0, 0) + 2v_y(0, 0) = 0 \qquad \text{und} \qquad -6u_y(0, 0) + 8v_y(0, 0) = 0\,.$$

Dieses lineare Gleichungssystem hat als Lösung nur $u_y(0, 0) = v_y(0, 0) = 0$.

**Aufgabe 35**

**a)** Das Taylorpolynom von $f$ zweiten Grades um den Punkt $\vec{x}_0$ ist gegeben durch

$$T_{2,\vec{x}_0}(\vec{h}\,) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} + \tfrac{1}{2}\vec{h}^{\,T} H_f(\vec{x}_0)\vec{h}\,.$$

Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = xe^z - y^2$, ergibt sich

$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^z \\ -2y \\ xe^z \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^z \\ 0 & -2 & 0 \\ e^z & 0 & xe^z \end{pmatrix}.$$

Für $\vec{x}_0 := (x_0, y_0, z_0) := (1, -1, 0)$ gilt also

$$f(\vec{x}_0) = 0\,, \qquad \nabla f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad H_f(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist (schreibe $\vec{h} = \vec{x} - \vec{x}_0$)

$$\begin{aligned} T_{2,\vec{x}_0}(\vec{h}) = 0 &+ (x - x_0) + 2(y - y_0) + (z - z_0) \\ &+ \tfrac{1}{2}\big(-2(y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + 2(x - x_0)(z - z_0)\big) \\ = (x - 1) &+ 2(y + 1) + z - (y + 1)^2 + \tfrac{1}{2}z^2 + (x - 1)z\,. \end{aligned}$$

**b)** Für die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \cos(x)\,\sin(y)\,e^{x-y}$, gilt

$$\begin{array}{lllcl}
f(x,y) & = e^{x-y}\cos x \sin y & \Rightarrow & f(0,0) & = & 0 \\
f_x(x,y) & = e^{x-y}(\cos x \sin y - \sin x \sin y) & \Rightarrow & f_x(0,0) & = & 0 \\
f_y(x,y) & = e^{x-y}(\cos x \cos y - \cos x \sin y) & \Rightarrow & f_y(0,0) & = & 1 \\
f_{xx}(x,y) & = e^{x-y}(-2\sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xx}(0,0) & = & 0 \\
f_{xy}(x,y) & = e^{x-y}(\sin x \sin y - \sin x \cos y - \cos x \sin y + \cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{xy}(0,0) & = & 1 \\
f_{yy}(x,y) & = e^{x-y}(-2\cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{yy}(0,0) & = & -2 \\
f_{xxx}(x,y) & = e^{x-y}(-2\cos x \sin y - 2\sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xxx}(0,0) & = & 0 \\
f_{xxy}(x,y) & = e^{x-y}(-2\sin x \cos y + 2\sin x \sin y) & \Rightarrow & f_{xxy}(0,0) & = & 0 \\
f_{xyy}(x,y) & = e^{x-y}(2\sin x \cos y - 2\cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{xyy}(0,0) & = & -2 \\
f_{yyy}(x,y) & = e^{x-y}(2\cos x \sin y + 2\cos x \cos y) & \Rightarrow & f_{yyy}(0,0) & = & 2
\end{array}$$

Damit ist für $\vec{h} = (h_1, h_2) = (x, y) - (x_0, y_0) = (x, y)$

$$\begin{aligned}
T_{3,(0,0)}(\vec{h}) &= T_{2,(0,0)}(\vec{h}) + \frac{1}{3!} \sum_{j_1,j_2,j_3=1}^{2} h_{j_1} h_{j_2} h_{j_3} \frac{\partial^3 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2} \partial x_{j_3}}(0,0) \\
&= f(0,0) + \nabla f(0,0) \cdot \vec{h} + \tfrac{1}{2} \vec{h}^{\,T} H_f(0,0) \vec{h} + \tfrac{1}{6} \left( h_2^3 f_{yyy}(0,0) + 3 h_1 h_2^2 f_{xyy}(0,0) \right) \\
&= 0 + h_2 + \tfrac{1}{2} \left( h_1 h_2 + h_1 h_2 - 2 h_2^2 \right) + \tfrac{1}{6} \left( 2 h_2^3 - 6 h_1 h_2^2 \right) \\
&= h_2 + h_1 h_2 - h_2^2 - h_1 h_2^2 + \tfrac{1}{3} h_2^3 \\
&= y + xy - xy^2 - y^2 + \tfrac{1}{3}\, y^3 \,.
\end{aligned}$$

**c)** Wie in **a)** gilt: Das Taylorpolynom von $f$ zweiten Grades um den Punkt $\vec{x}_0$ ist gegeben durch

$$T_{2,\vec{x}_0}(\vec{h}\,) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) \cdot \vec{h} + \tfrac{1}{2} \vec{h}^{\,T} H_f(\vec{x}_0) \vec{h}\,.$$

Für die Funktion $f(x, y) = x^y$ ergeben sich folgende Ableitungen:

$$\begin{aligned}
&f_x(x,y) = x^{y-1} y, \quad f_y(x,y) = x^y \ln(x) \\
&f_{xx}(x,y) = x^{y-2}(y^2 - y), \quad f_{xy}(x,y) = x^{y-1}(y \ln(x) + 1), \quad f_{yy}(x,y) = x^y (\ln(x))^2
\end{aligned}$$

Somit gilt für $(x_0, y_0) = (1, 3)$:

$$\nabla f(1,3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad H_f(1,3) = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und für das Taylorpolynom folgt

$$T_{2,(1,3)}(\vec{h}) = 1 + 3h_1 + \tfrac{1}{2}(6h_1^2 + 2h_1 h_2) = 1 + 3h_1 + 3h_1^2 + h_1 h_2$$

Um eine Näherung für den Wert $1.02^{3.01}$ zu berechnen, setzen wir $\vec{h} = (1.02 - x_0, 3.01 - y_0) = (0.02, 0.01)$ ein und erhalten

$$T_{2,(1,3)}(0.02, 0.01) = 1.0614$$

Eine Kontrollrechnung mit dem Taschenrechner zeigt: $1.02^{3.01} \approx 1.0614181679$.

**Aufgabe 36**

**a)** Es sei $\vec{y}$ ein beliebiger Punkt aus $f(G)$ und $\vec{x} \in G$ mit $f(\vec{x}) = \vec{y}$. Da $f'(\vec{x})$ nach Voraussetzung invertierbar ist, können wir den Umkehrsatz anwenden (wobei $f$ nun als Funktion von $G$ nach $\mathbb{R}^n$ betrachtet wird). Dieser liefert die Existenz offener Umgebungen $U$ von $\vec{x}$, mit $\vec{x} \in U \subseteq G$, und $V$ von $\vec{y}$, so dass $f : U \to V$ bijektiv ist. Wegen $U \subseteq G$ folgt insbesondere $V = f(U) \subseteq f(G)$, also die Behauptung (denn $V$ ist offen und $\vec{y} \in V$).

**b)** Wir lösen die Aufgabe auf zwei unterschiedlichen Wegen:

**Lösung 1** Definiere $g : D \to \mathbb{R}$, $g(\vec{x}) = \|f(\vec{x})\|^2$ (diese Funktion besitzt die gleichen Extremstellen wie $\vec{x} \mapsto \|f(\vec{x})\|$). Die Ableitung von $\vec{x} \mapsto \|\vec{x}\|^2$ ist gegeben durch die Funktion $\vec{x} \mapsto 2\vec{x}^T$ ($\vec{x}$ wird hier als Spaltenvektor notiert). Somit folgt mit der Kettenregel für die Ableitung von $g$:

$$g'(\vec{x}) = 2 f(\vec{x})^T f'(\vec{x}).$$

Wir nehmen an, dass $g$ an der Stelle $x_0 \in D$ ein Maximum oder Minimum annimmt. Dann muss aber auch die Funktion $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_k(z) := g(\vec{x}_{0,1}, \ldots, \vec{x}_{0,k-1}, z, \vec{x}_{0,k+1}, \ldots, \vec{x}_{0,n})$ ein Extremum in $z = \vec{x}_{0,k}$ besitzen ($k = 1, \ldots, n$). Nach HMI folgt dann, dass $g_k'(\vec{x}_{0,k}) = 0$ gelten muss, also (wieder Kettenregel)

$$0 = g_k'(\vec{x}_{0,k}) = \frac{\partial g}{\partial x_k}(\vec{x}_0)$$

Insgesamt erhalten wir also

$$\nabla g(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

(Bemerkung: Diese notwendige Bedingung für ein Extremum werden wir auch diese Woche in der Vorlesung sehen.)

Wegen $\nabla g(\vec{x}_0) = \vec{0} \iff f(\vec{x}_0)^T f'(\vec{x}_0) = \vec{0}$ und der Regularität von $f'(\vec{x}_0)$ folgt, dass $f(\vec{x}_0) = \vec{0}$ gelten muss. Da $\|f(\vec{x})\| \geq 0$ für alle $\vec{x} \in D$ und $\|f(\vec{x}_0)\| = 0$, kann $\vec{x}_0$ nur ein Minimum sein. Die Funktion besitzt kein Maximum.

**Lösung 2** Wir nehmen an, dass die Funktion an der Stelle $\vec{x}_0$ ein Maximum annimmt, d.h. es gilt

$$\|f(\vec{x})\| \leq \|f(\vec{x}_0)\| \qquad \text{für alle } \vec{x} \in D. \tag{1}$$

Es gilt $\|f(\vec{x}_0)\| \neq 0$, denn sonst wäre $0 = \|f(\vec{x})\|$ für alle $\vec{x} \in G$, also $f$ konstant Null und somit nirgends invertierbar. Nach Teil **a)** ist das Bild $f(D)$ offen, d.h. es existiert ein $\varepsilon > 0$ so dass $K(f(\vec{x}_0), \varepsilon) \subseteq f(D)$. Wir setzen

$$\rho = \frac{\varepsilon}{2\|f(\vec{x}_0)\|}$$

und betrachten den Punkt $\vec{y}_1 = f(\vec{x}_0) + \rho f(\vec{x}_0)$. Wegen $\|\vec{y}_1 - f(\vec{x}_0)\| = \|\rho f(\vec{x}_0)\| = \frac{\varepsilon}{2}$ gilt $\vec{y}_1 \in K(f(\vec{x}_0), \varepsilon) \in f(D)$. Also existiert $\vec{x}_1 \in D$ mit $f(\vec{x}_1) = \vec{y}_1$. Es gilt aber:

$$\|f(\vec{x}_1)\| = \|\vec{y}_1\| = (1 + \rho)\|f(\vec{x}_0)\| > \|f(\vec{x}_0)\|$$

Dies ist ein Widerspruch zu (1).

Falls für ein $\vec{x}_0 \in D$ gilt $f(\vec{x}_0) = \vec{0}$, so folgt, dass $\vec{x}_0$ ein Minimum ist (da $\|f(\vec{x})\| \geq 0$ für alle $\vec{x} \in D$). Tritt dieser Fall nicht ein, so können wir analog zum bisherigen Vorgehen zeigen, dass $\vec{x} \mapsto \|f(\vec{x})\|$ kein Minimum besitzt (definiere $\vec{y}_1 = f(\vec{x}_0) - \rho f(\vec{x}_0)$).