Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Institut für Analysis
Priv.-Doz. Dr. P. C. Kunstmann
Dipl.-Math. D. Roth

SS 2012
7.06.2012

Höhere Mathematik II für die Fachrichtung Physik

8. Übungsblatt

Aufgabe 37

Bestimmen Sie jeweils alle Stellen lokaler Extrema der Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, und entscheiden Sie, ob es sich dabei um Maxima oder Minima handelt.

a) $f(x,y) = xy + x - 2y - 2$

b) $f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 2y^3 - 3$

c) $f(x,y) = (2x + 2y + 3)e^{-x^2-y^2}$

Aufgabe 38

Es sei $Q := [0,5] \times [0,5] \subset \mathbb{R}^2$. Die Funktion $f\colon Q \to \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$f(x,y) = x^2y - 4xy + 4y - 2x^2 - 2\,.$$

Begründen Sie, dass f auf Q Maximum und Minimum besitzt, und bestimmen Sie diese.

Aufgabe 39

Bestimmen Sie die globalen Extrema der Funktion $f(x,y,z) = 5x + y - 3z$ auf der Menge $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0,\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

Aufgabe 40

Gegeben sei die Funktion $f(x,y) = 12x^4 - 7x^2y + y^2$.

a) Berechnen Sie alle kritischen Punkte von f.

b) Überprüfen Sie mit Hilfe der Hessematrix von f, ob die kritischen Punkte auch Extremstellen von f sind.

c) Zeigen Sie, dass f längs jeder Geraden durch Null ein Minimum im Nullpunkt besitzt.

d) Besitzt f auch längs jeder Parabel $y = ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}$ ein Minimum im Ursprung?

Aufgabe 41

Das Vektorfeld $g\colon \mathbb{R}^3 \backslash \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$g(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}\,(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3)\,.$$

Bestimmen Sie die Rotation und die Divergenz von g.

Aufgabe 42

Eine C^2-Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}$ heißt *radialsymmetrisch*, falls $f(\vec{x})$ nur von $\|\vec{x}\|$ abhängt, d.h. falls $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ für alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n \backslash \{\vec{0}\}$ mit $\|\vec{x}\| = \|\vec{y}\|$ gilt.
In diesem Fall gibt es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit $f(\vec{x}) = F(\|\vec{x}\|)$ für alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$. Zeigen Sie für jedes $\vec{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$

$$\Delta f(\vec{x}) = F''\big(\|\vec{x}\|\big) + \frac{n-1}{\|\vec{x}\|}\,F'\big(\|\vec{x}\|\big)\,.$$